Cambi di convinzione sulla pratica didattica concernente le frazioni

Una learning story basata su una ricerca-azione di gruppo e sua influenza sulle decisioni relative alla trasposizione didattica delle frazioni

Lorella Campolucci
Danila Maori
NRD di Bologna
Matematica in Rete - Corinaldo

Martha I. Fandiño Pinilla
Silvia Sbaragli
NRD di Bologna, Università di Bolzano,
ASP di Locarno

Insegnanti partecipanti al lavoro di ricerca:
Antonella Alfonsi, Cinzia Bambini, Tiziana Brescini, Marialina Brunetti, Adele Buratti, Stefania Buschi, Paola Buzi, Paola Ceccacci, Anna Rita Ciarrocchi, Noemi Cicetti, Lorella Conti, Paola Costantini, Antonietta Fracchiolla, Maria Teresa Galli, Simona Giancamilli, Flora Landi, Lorenza Lenci, Maria Mancinelli, Annunziata Mancini, Miriam Manoni, Giuliana Mantoni, Laura Mantoni, Massimina Paolinelli, Rossana Pistelli, Ginetta Ponzetti, Claudia Romagnoli, Maria Grazia Rosi, Lucia Rosini, Laura Rossini, Katia Rugini, Elda Maria Santinelli, Valentina Sparacciari, Francesca Tarsi, Angela Tommasetti

Lavoro eseguito nell'àmbito del programma strategico di ricerca del NRD di Bologna: «*Aspetti metodologici (teorici ed empirici) della formazione iniziale ed in servizio degli insegnanti di matematica di ogni livello scolastico*», con fondi dell'Università di Bologna, coordinato scientificamente dal prof. Bruno D'Amore.

Questo articolo è stato oggetto di pubblicazione in
Campulucci L., Maori D., Fandiño Pinilla M.I., Sbaragli S. (2006). Cambi di convinzione sulla pratica didattica concernente le frazioni. *La matematica e la sua didattica.* 3, 353-400.

Sunto. *In questo articolo si propone il rendiconto di un'esperienza di apprendimento e di ricerca – azione messa in atto da parte di un gruppo di 36 insegnanti (di scuola dell'infanzia, primaria, secondaria di I grado, 2 delle quali con funzioni trainanti, sotto la supervisione e con la collaborazione di 2* *docenti universitarie). Il tema delle frazioni, considerato da tutti come di complessa costruzione concettuale da parte degli studenti, ma di non difficile rilievo matematico, è stato affrontato dapprima in corsi di aggiornamento e poi in momenti di studio collettivo, seguendo il testo Fandiño Pinilla (2005). Lo studio consapevole e adulto, dai punti di vista matematico, epistemologico e didattico, ha portato le componenti del gruppo ad esprimere le loro convinzioni matematiche, epistemologiche e didattiche preliminari, a prendere coscienza di cambiamenti anche notevoli circa tali convinzioni; il che ha costretto, sempre in àmbito di ricerca - azione, a rivedere le proprie posizioni per quanto concerne la trasposizione didattica delle frazioni. La metodologia scelta per questo resoconto è la learning story, con interventi diretti dei partecipanti, secondo la metodologia della riflessione personale (autobiografia).*

Summary. *In this article we report a learning and research-action experience carried on by a group of 36 teachers (from nursery school, primary school, secondary school, two of them with a leading role, under the supervision and with the collaboration of 2 university teachers). Fractions, a subject considered by everybody a conceptual construction difficult to achieve by students, but not of difficult mathematical relevance, have been treated first in updating courses and later on in study group courses following the textbook of Fandiño Pinilla (2005). The study of fractions conducted by aware and adult learners under an epistemological, mathematical and didactic point of view, has brought the members of the group to express their mathematical, epistemological and didactic preliminary beliefs, to become aware of also important changes regarding these beliefs; this has obliged teachers, always in the ambit of research-action experiences, to revise their attitude concerning the didactic transposition of fractions. The chosen methodology for this account is the learning story, with direct participation of the members of the group in accordance with to the personal reflection methodology (autobiography).*

Resumen. *En este artículo se hace el balance final de una experiencia de aprendizaje y de investigación - acción realizada por parte de un grupo de 36 docentes (de escuela de infancia, primaria, secundaria de I° grado, 2 de ellos con funciones de liderazgo, bajo la supervisión y la colaboración de 2 docentes universitarios). El tema de las fracciones, considerado por los docentes como de compleja construcción conceptual, pero sin ninguna dificultad matemática, fue afrontado en primer lugar en un curso de formación para docentes en servicio, y después estudiado colectivamente, siguiendo el texto de Fandiño Pinilla (2005). El estudio consciente y profesional, de los aspectos matemáticos, epistemológicos y didácticos, permitió que los integrantes del grupo expresaran sus convicciones preliminares y tomaran conciencia de los* *cambios, incluso de gran peso, acerca de dichas convicciones, concluyendo, siempre en ámbito de investigación - acción, con el análisis de las propias posiciones con respecto a la transposición didáctica de las fracciones, La metodología elegida para este balance es la llamada learning story, con intervenciones directas por parte de los participantes, siguiendo la metodología de la reflexión personal (autobiografía).*

Résumé. *Cet article présente le rapport sur une expérience d'apprentissage et de recherche-action conçu par un groupe de 36 enseignantes (de l'école maternelle, primaire, secondaire de premier degré, 2 d'entre elles ayant fonctions d'animation, sous la direction de 2 enseignantes universitaires). Le sujet des fractions, généralement considéré complexe dans sa construction conceptuelle faite par les élèves, mais absolument pas difficile du point de vue mathématique, a été étudié dans une première phase par le moyen de cours de recyclage et ensuite par une réflexion collective, avec le support du texte Fandiño Pinilla (2005). L'étude conscient et adulte du point de vue mathématique, épistémologique et didactique a stimulé les composantes du groupe à exprimer leurs convinctions mathématiques, épistémologiques et didactiques initiales, ensuite à prendre conscience des changements, parfois consistants, concernants ces convinctions; cela a obligé chaqun, dans le cadre de la recherche-action, à revoir ses positions concernantes la transposition didactique des fractions. La méthodologie adoptée par ce rapport est la «learning story», avec interventions directes des participants, selon la méthodologie de la reflexion personnelle.*

Resumo. *Neste artigo vamos relatar uma experiência de aprendizagem e pesquisa - ação atuado para 36 professores (de escola da infância, escola primária e secundária de primero grau, 2 das quais con funções de direção, baixo a supervisão de 2 professoras universitárias). O sujeito das frações, considerado para todos como uma costrução conceptual complexa para os estudantes, mesmo não sendo matematicamente difficil, foi analizado primeramente em cursos de atualização e depois em estudo coletivo, seguindo o texto de Fandiño Pinilla (2005). O estudo matemáticamente, epistemológicamente e didáticamente consciente e adulto, levou as integrantes do grupo a exprimir as convicções matemáticas, epistemológicas e didáticas preliminares delas e a tomar conciência de mudanças até importantes sobre estas convicções; isso obrigou, sempre no contexto da persquisa – ação, a reexaminar e corrigir as proprias posições sobre a transposição didática das frações. A metodologia escolhida para este relatório è a learning story, com interventos diretos dos partecipantes, secundo a metodologia da riflessão pessoal (autobiografia).*

Zusammenfassung. *Der Artikel beschreibt eine Erfahrung betreffend Lernprozess und Suchtätigkeit, von einer Gruppe von 36 Lehererinnen (des Kindergartens, der Primar- und Sekundar-Schule der ersten Stufe, zwei von ihnen mit Leitfunktionen in Mitarbeit mit 2 Universitätsprofessorinnen) durchgeführt. Das Thema der Brüche, von allen als komplexen Lernbegriff betrachtet, aber vom mathematischen Standpunkt absolut nicht schwierig, ist zuerst mittels eines Bildungskurs und nacher mit einer gemeinschaftlichen Überlegung gemäss das Buch Fandiño Pinilla (2005) in Angriff genommen worden. Das von den mathematischen, epistemologischen und didaktischen Standpunkten bewussten Lernen hat die Teilnehmer der Gruppe getrieben, ihre ursprünglichen, mathematischen, epistemologischen und didaktischen Überzeugungen zu äussern, und nacher die relativen manchmal relevanten Veränderungen in Betracht zu ziehen; im Bereich der Forschung, hat dies die Teilnehmer gezwungen, ihre Meinungen betreffend die didaktische Transposition des Themas Brüche nachzuprüfen. Die gewählte Methodologie dieses Berichts ist die «learning story», mit der direkten Teilnahme der Lehrerinnen, gemäss der Verfahrensweise der persönlichen Überlegung.*

1. Premessa e quadro teorico

Vista la complessa vastità dei riferimenti concettuali sui quali è basata questa ricerca, ci vediamo costrette a dividere il quadro teorico in varie componenti, per chiarezza, dichiarando però l'indiscussa visione olistica dell'oggetto di studio. Tali componenti sono divise in 4 paragrafi:
A) Convinzioni, cambi di convinzioni ed aspetti connessi;
B) Frazioni;
C) Ricerca – azione;
D) Learning stories personali (autobiografie).

A) Convinzioni, cambi di convinzioni ed aspetti connessi

I cambi di convinzione dei docenti relativamente ad un tema, matematico, epistemologico o didattico, rappresentano sempre un aspetto non facile da affrontare, perché in taluni casi vanno a confliggere con aspetti personali e professionalmente delicati. Tuttavia, la loro importanza per la didattica è notevole, come la ricerca attuale mostra; è oggi infatti universalmente riconosciuto che le convinzioni sono costituenti importanti dell'insieme delle conoscenze, dato che le determinano e le condizionano, come aveva già rilevato Schoenfeld (1983) oltre vent'anni fa.

Per avere un esempio di studio di questo settore e per la vasta bibliografia specifica ivi analizzata, si veda D'Amore, Fandiño Pinilla

(2004), lavoro dedicato ai cambi di convinzione in matematica, epistemologia e didattica da parte di insegnanti (di scuola secondaria) in formazione.
Volendoci accingere a trattare il tema delle convinzioni, reputiamo di un certo interesse dichiarare esplicitamente che ci serviremo delle seguenti definizioni di tali termini (D'Amore, Fandiño Pinilla, 2004):

- *convinzione* (belief) (o credenza): opinione, insieme di giudizi/attese, quel che si pensa a proposito di qualcosa;
- l'insieme delle convinzioni di qualcuno (A) su qualcosa (T) dà la *concezione* (K) di A relativamente a T; se A appartiene ad un gruppo sociale (S) e condivide con gli altri appartenenti ad S quell'insieme di convinzioni relativamente a T, allora K è la concezione di S relativamente a T; spesso, in luogo di "concezione di A relativamente a T" si parla di "immagine che A ha di T".

Noi ci occupiamo qui solo del caso in cui T sia il tema delle frazioni, in senso matematico ed epistemologico, o della didattica delle frazioni.
Si noti che presenteremo uno studio collettivo; dunque, in questo lavoro, il passaggio da una convinzione personale ad una concezione condivisa è di estrema specificità, dato che le convinzioni sono condizionate da complesse interazioni all'interno dei gruppi sociali. Infatti, non potendosi separare l'analisi delle convinzioni individuali dall'analisi delle convinzioni del gruppo di appartenenza (Hoyles, 1992), dobbiamo considerare anche l'aspetto microsociale, molto importante in questa ricerca, come mostreremo.
In generale, le convinzioni personali degli insegnanti, preliminari allo studio collettivo ed individuale, sono costruite, com'è usuale, attraverso una formazione iniziale, attraverso le esperienze d'insegnamento, trovando rinforzi anche su libri di testo e, non ultimo per importanza, sono condizionate dalle interazioni all'interno del gruppo sociale di appartenenza. Ciò vale dunque, in particolare, anche in questo caso, sul tema specifico delle frazioni: ne avremo diverse conferme attraverso dichiarazioni personali delle insegnanti - ricercatrici. Si vedrà che, in molte occasioni, queste faranno riferimento esplicito al gruppo di appartenenza come facilitatore dei cambi di convinzione. Si vedrà anche come sia importante il fatto che l'insegnante scopra di essere in *dissonanza cognitiva* con alcuni propri colleghi nei confronti dei quali ha apprezzamento e stima, proprio a causa dello studio intrapreso da questi ultimi; così come ha rivelato Leo Festinger (1957-1973), la dissonanza

provoca un disagio che spinge l'individuo in oggetto a cercare *consonanza* con i propri simili (es. gli appartenenti al proprio gruppo). «Se la consonanza è presente, vige una sorta di principio di conservazione, cioè si tende a renderla stabile, evitando le situazioni che possono creare dissonanza» (D'Amore, 1991). Questo fatto spiega gli altrimenti strani atteggiamenti di quegli insegnanti che, anche di fronte ad evidenti insuccessi cognitivi, decidono di non apportare alcuna modifica alla propria azione didattica.

Che le convinzioni personali influiscano sulle scelte didattiche e metodologiche, è già stato mostrato in altro lavoro del NRD di Bologna, dedicato però al tema "area e perimetro" (D'Amore, Fandiño Pinilla, 2005); in questo lavoro, le convinzioni personali di ricercatori, insegnanti ed allievi venivano poste in stretta relazione. È bene però ricordare che diversi studi hanno mostrato l'esistenza di discordanze tra le credenze e le pratiche (Brown, 1985; Cooney, 1983; 1985; Shaw, 1989; Thompson, 1984). Come riportato in da Ponte (1999), queste discordanze suggeriscono che non c'è una semplice relazione di causa - effetto tra convinzioni e pratiche ed evidenziano l'esistenza di altri fattori che influenzano la pratica professionale ed il contesto istituzionale (Brown, 1985; Cooney, 1985; Furinghetti, 1997; Hoyles, 1992). Tali discordanze sono minori quando gli insegnanti hanno l'opportunità di riflettere sulla loro pratica (Thompson, 1984), così com'è avvenuto in questa ricerca. Inoltre, Llinares (1999) sottolinea come vi sia una relazione dialettica tra convinzioni e pratiche per cui è difficile indicare se le convinzioni dirigono la pratica o viceversa.

È vero, come ha evidenziato la ricerca, che le convinzioni possono avere effetti deleteri sull'azione didattica, ma può valere anche il viceversa, come dimostra il nostro caso; siamo confortati in questo anche dalla seguente affermazione: «Le convinzioni possono essere un ostacolo ma anche una potente forza che permette di effettuare cambiamenti nell'insegnamento» (Tirosh, Graeber, 2003). In particolare, in questa ricerca abbiamo già fatto e faremo spesso relazione al passaggio dalle convinzioni personali a quelle collettive della microsocietà di appartenenza; tra gli studi dedicati alla classe intesa come società, suggeriamo Bagni, D'Amore (2005) e D'Amore (2005); ivi, si sottolineano le analisi dei comportamenti dei componenti il gruppo - classe come quelli di (più genericamente) componenti una società, proprio nel senso della sociologia. Quel che in questo ed altri analoghi lavori viene evidenziato nel gruppo formato da allievi, qui viene trasferito al gruppo formato da insegnanti.

D'altra parte, che vi siano strettissime analogie tra i comportamenti di questi due diversi tipi di gruppi sociali, è già stato ampiamente messo in evidenza dalla letteratura di ricerca (si veda, per esempio: Shifter, 1990, 1993; Chapman, 1996; Jaworski, Wood, Dawson, 1999; Adler, 2001; Wood, 2001; McClain, 2003a,b). Un vasto recente lavoro di panorama su questo tema, almeno per quanto concerne la comunità PME,[1] si trova in Llinares, Kraimer (2006).

Nel nostro caso, il gruppo è formato da 36 insegnanti, 2 delle quali trainanti, come abbiamo già ricordato; tutte hanno seguito un corso di formazione condotto da 2 docenti universitarie che fungono da riconosciute ed anzi auspicate istituzionalizzatici della conoscenza. A tal proposito, in da Ponte et al. (1999), gli autori, citando Rokeach (1979), mettono in evidenza come il cambiamento di convinzioni non sia possibile senza sapere che cosa cambiare. In questa ricerca, nei confronti delle 2 docenti universitarie, il gruppo delle insegnanti assume tutte le caratteristiche di studenti in situazione di apprendimento, confermando quanto esposto nella letteratura ricordata poco sopra.

Ma su questo punto si dovrà scendere maggiormente in profondità; lasceremo questo compito alle dichiarazioni spontanee delle insegnanti – ricercatrici nelle loro autobiografie.[2]

Nel nostro lavoro, inoltre, si dà grande rilievo epistemologico alla prospettiva socioculturale ed all'interpretazione delle "pratiche" come costituenti le trame di costruzione concettuale, in chiara visione anti - platonismo o, meglio, anti – realismo. Sull'interpretazione della prospettiva socioculturale, si può vedere l'intervista – colloquio D'Amore, Radford, Bagni (2006); sulle pratiche nell'attività matematica in aula, si veda D'Amore, Godino (2006); sulla dicotomia realismo – pragmatismo, si può vedere D'Amore, Fandiño Pinilla (2001), D'Amore (2003), D'Amore, Godino (2006); in quest'ultimo lavoro si propone un'analisi storico – critica delle prospettive derivate, antropologica ed ontogenetica. Come si può evincere da questo primo punto del quadro teorico, la ricerca abbraccia molteplici aspetti di grande interesse; essi non sono isolati, ma costituiscono un primo sguardo d'insieme.

---

[1] Gruppo internazionale che studia la Psicologia dell'Educazione Matematica.

[2] Nel paragrafo D), tra breve, diremo di più su questo termine.

B) Frazioni

Come affermano Hiebert, Morris e Glass (2003), un problema persistente nell'educazione matematica è come progettare programmi di formazione (anche per insegnanti in servizio) che influiscano sulla natura e la qualità della pratica degli insegnanti. L'assenza di effetti significativi dei programmi di formazione degli insegnanti in tale pratica si può spiegare, almeno in parte, «con la mancanza di una conoscenza di base ampiamente compartita sull'insegnamento e la formazione degli insegnanti» (p. 201). Una di queste cause di base, a nostro avviso, consiste proprio nella formazione matematica. Dovendo affrontare una riflessione critica sull'insegnamento-apprendimento delle frazioni, ci si può chiedere: quando mai gli insegnanti di scuola primaria hanno davvero affrontato uno studio serio, dal punto di vista matematico, delle frazioni o dei numeri razionali? È a causa della risposta a questa domanda, che abbiamo deciso di far fronte all'esigenza culturale su questo tema.

Il tema delle frazioni è uno dei capisaldi della didattica della matematica, nella scuola primaria e nella scuola secondaria, specie della media di I grado, in contesto internazionale. Ciò spiega perché tale tema sia stato uno dei più studiati, fin dagli anni '60, tanto che «citare tutte le ricerche è impossibile, vista la vastità che supera ogni immaginazione» (Fandiño Pinilla, 2005, p. 80).

Il tema si presta molto bene a mettere in evidenza le peculiarità specifiche della trasposizione didattica (D'Amore, 1999).

La trasposizione didattica, cioè il passaggio dal Sapere (accademico) al sapere da insegnare, è troppo spesso banalizzata, pensandola come una semplice azione di semplificazione o di divulgazione; di fatto consta, al contrario, di un importante atto creativo da parte dell'insegnante che deve *trasformare* il Sapere. Proprio le frazioni rappresentano un esempio splendido in tal senso: «Si rende così evidentemente necessaria un'azione forte di trasposizione didattica che permetta di trasporre Q^a [insieme dei numeri razionali assoluti] in qualche cosa che sia accessibile all'allievo di primaria e poi di secondaria» (Fandiño Pinilla, 2002, pag. 76).

Quel che spesso sorprende molto l'insegnante che non domina troppo la parte matematica (frazioni come rappresentazioni semiotiche dei numeri razionali in un registro opportuno), è che l'usuale definizione di frazione che viene proposta nei sussidiari e nei libri di testo, non è minimamente

adeguata a fungere da supporto concettuale alle successive interpretazioni che della frazione vengono offerte (implicitamente) agli studenti e poi richieste (esplicitamente).
Tale "definizione" è solitamente espressa più o meno in questi termini: «Si ha una unità-tutto e la si divide in parti *uguali*; ciascuna di queste parti è una "unità frazionaria"; per esempio, se l'unità-tutto è stata divisa in 4 unità frazionarie, allora ciascuna di esse si chiama "un quarto" e si scrive $\frac{1}{4}$. Se di queste unità frazionarie se ne prendono alcune, allora la parte presa dell'unità-tutto si chiama frazione. Nel nostro esempio, abbiamo preso 3 unità frazionarie $\frac{1}{4}$, allora si dice che si è presa la frazione "tre quarti" che si scrive $\frac{3}{4}$» (Fandiño Pinilla 2005, 99-100; la definizione è presa da un libro di testo per la scuola media diffuso in Italia; il corsivo usato per la parola "uguali" è nostro).In Fandiño Pinilla (2005), per esempio, vengono fornite 12 diverse interpretazioni dell'idea di frazione, assai poche delle quali si possono considerare ben fondate su tale definizione.
Non solo, ma l'aggettivo "uguale", che sembra essere il cardine di tale definizione, dà luogo più ad equivoci e malintesi, dunque a misconcezioni (D'Amore, 1999; D'Amore, Sbaragli, 2005; Sbaragli, 2005), che non a certezze.
Un'analisi molto critica ed articolata dei lavori di ricerca sui processi di insegnamento – apprendimento delle frazioni, rivela che il rimedio all'evidente insuccesso planetario della didattica della frazioni non si risolve banalmente modificando il loro insegnamento in termini matematici, ma affrontando la questione attraverso una minuziosa verifica degli errori tipici degli studenti in termini di didattica della matematica, come si vede bene in Fandiño Pinilla (2005).
Non esamineremo qui in dettaglio le caratteristiche salienti della didattica delle frazioni, per le quali rimandiamo al testo appena citato. Ci limitiamo a dire che, a fronte dell'apparente semplicità concettuale di quella definizione, l'apprendimento delle frazioni si mostra nella sua piena complessità quando se ne affronta uno studio matematico, epistemologico e didattico di un certo impegno, com'è occorso alle

insegnanti del gruppo di *ricerca - azione*[3] di cui si tratta in questo articolo.
Proprio per questo, lo studio genera sorpresa, specie se quello individuale è messo a confronto con quello collettivo dell'insieme sociale di appartenenza, con libero e sincero scambio di informazioni. La pratica condivisa sull'insegnamento delle frazioni rivela un certo accordo sostanziale la cui messa in discussione in termini critici provoca ancora di più reazioni di stupore e insicurezza su come procedere di conseguenza. Come mostra da Ponte (1994), gli insegnanti possono lottare contro la contraddizione di essere a favore di alcuni approcci curricolari che non riescono a trasferire in pratica a causa della loro insicurezza su come farlo.
Detto degli studi matematico e didattico, ci preme evidenziare l'importanza degli studi storico ed epistemologico.
Come troppo spesso capita, i temi matematici sembrano essere interpretati, perfino dagli insegnanti, come de-storicizzati e come privi di spessore concettuale filosofico; nel testo studiato dalle insegnanti del gruppo (Fandiño Pinilla, 2005), un intero capitolo è dedicato alla storia delle frazioni, ma una *storia* intesa in senso critico, evolutivo; inoltre, in tutto il libro sono accennate questioni epistemologiche connesse al tema.
Dunque, le insegnanti – ricercatrici del gruppo analizzavano singolarmente e in gruppo gli aspetti storici ed epistemologici mano a mano che svolgevano la loro quotidiana azione didattica, dunque, perfettamente in situazione di ricerca – azione. Quale sia il ruolo dello studio dell'epistemologia (ivi compresa la storia) della matematica nella formazione degli insegnanti, d'altra parte, era già stato messo in rilevo in D'Amore (2004). Ivi si sottolinea il duplice ruolo di questo studio nella formazione: (1) culturale (formazione di conoscenza come base di competenza), (2) professionale (riconoscimento degli ostacoli epistemologici nel comportamento degli studenti).

C) Ricerca - azione

La ricerca – azione è una ben nota metodologia di ricerca che affonda le sue radici in lavori degli anni '40 negli USA, specie di Lewin (1946), ma che ha trovato una significativa sistemazione concettuale nel mondo della scuola, con i classici lavori di Henry e Kemmis (1985), Easen

[3] Nel paragrafo C), tra breve, diremo di più su questo termine.

(1985) e Ebbutt (1985), soprattutto in Australia, negli Stati Uniti e in Gran Bretagna.
Della ricerca - azione sono state date varie definizioni. Riportiamo quella di Ebbutt (1985) che la definisce come: «the systematic study of attempts to change and improve educational practice by groups of participants by means of their own practical actions and by means of their own reflections upon the effects of those actions».
In base a ciò, appare ovvio come essa si presti bene alla ricerca quando ad effettuarla è lo stesso insegnante, nella propria aula.
La ricerca – azione è contraddistinta da una doppia funzione dell'insegnante - ricercatore, dallo studio approfondito di un tema di ricerca, dall'analisi dei prodotti dei propri allievi in termini di ricerca e, non ultimo, anzi, in questo caso prioritario, l'osservazione di sé stessi nel fare ricerca. Nel nostro caso, ci preme evidenziare come «la ricerca - azione porta il ricercatore a interagire con l'oggetto della ricerca e quindi a essere direttamente implicato» (Canevaro, Gaudreau, 1988).
Nella ricerca - azione è dunque giocoforza mettersi nei panni di chi apprende, tanto più se, come in questo nostro caso, l'osservazione dell'allievo è di fatto l'osservazione di una difficoltà di apprendimento che si sta verificando anche su sé stessi (l'allievo la mattina, in aula; sé stessi nel pomeriggio, nelle riunioni di studio e discussione); ciò porta al paradigma simbiosinergico di Jean Marie Brouchard (1987), ideato in verità per casi di tutt'altro genere, secondo il quale la conoscenza risulta dall'unione dell'osservatore con l'osservato. Afferma Canevaro (1990): «[Nella ricerca – azione] Vi è (…) la necessità di ragionare sugli strumenti e sui risultati mettendo in luce gli aspetti che sono propri di diverse logiche e quindi di diverse identità culturali». A proposito proprio degli strumenti e delle metodologie di ricerca all'interno della ricerca - azione, un'analisi critica è condotta in D'Amore (1991) che riporta una calzante riflessione di Frabboni (1990): «La ricerca - azione, come modello di ricerca applicata, si pone in sintonia concettuale con i presupposti del razionalismo critico», accettando, sul doppio binario scientifico (induttivo o deduttivo), il secondo.
Con questi presupposti, vedremo quali siano state le attività di confronto tra la propria azione in aula ed il proprio (nuovo) apprendimento critico (matematico, epistemologico, didattico), grazie alle auto-dichiarazioni esplicite delle insegnanti che hanno partecipato alla ricerca.

D) Learning stories personali (autobiografie)

In questa ricerca facciamo largo uso delle dichiarazioni effettuate per iscritto dagli stessi insegnanti impegnati. Con varie denominazioni,[4] questa tecnica viene molto usata con profitto dalla ricerca in contesto internazionale da tempo; ne è prova il lavoro anticipatore di Gudmundsdottir (1996), nel quale si usa la *metafora dell'iceberg* per illustrare come la punta emergente corrisponde a quanto viene dichiarato come risposta (esplicita) da un insegnante ad una domanda nel corso di una intervista, mentre la parte maggiore (implicita) è quella nascosta sotto l'acqua; essa emerge solo grazie ad una narrazione personale.

Particolarmente interessante per noi è la ricerca descritta in Edwards, Hensien (1999) dato che ivi si analizza un gruppo di insegnanti (di scuola primaria e di scuola secondaria) impegnati in una ricerca – azione comune tendente a discutere sull'azione didattica in aula; ebbene, gli insegnanti si esprimono proprio mediante la narrazione di quel che avviene e delle sensazioni provate durante tale azione.

In Gudmundsdottir, Flem (2000) si discute, sempre facendo uso di queste tecniche "narrative", com'è cambiata la vita in aula nelle ultime decadi, quali siano le sensazioni ed i sentimenti degli insegnanti a questo proposito; mentre in Gudmundsdottir (2001) si presenta la narrazione di un'esperienza di insegnamento "aperto" in una scuola per bambini tra i 5 e gli 8 anni; in Elbaz-Luwisch, Moen, Gudmundsdottir (2002) si avvia un dialogo a più voci su temi scientifici, nel quale i protagonisti sono gli insegnanti, in opposizione a quel che il teorico del dialogo Michael Bakhtine affermava sulle scienze esatte, e cioè che fossero "una forma monologica di conoscenza".

In Strehele et al. (2001) la tecnica è usata per studiare l'integrazione delle tecnologie nella pratica didattica; mentre in Raths (2001) si analizzano le convinzioni sull'insegnante e sull'insegnare, anche in vista della decisione di modificare le proprie strategie di insegnamento.

Anche in Presmeg (2002) il focus è sull'uso dell'autobiografia per far emergere le proprie convinzioni sulla matematica ed i cambi relativi con il passare del tempo; mentre in de Freitas (2004) la tecnica della narrazione è indirizzata a smentire il fatto, comunemente ritenuto

---

[4] Bisogna distinguere gli interventi scritti spontanei degli insegnanti, che tratteremo qui, da quelli degli studenti su temi di matematica, i cosiddetti TEPs, qui non presi in considerazione; su questo ultimo argomento, si può vedere D'Amore, Maier (2002).

accettato, che la matematica e l'insegnamento della matematica siano scevri da condizionamenti politici.
Molto interessante l'uso di ricerca che si fa dei testi scritti dai soggetti analizzati, insegnanti di scuola secondaria in formazione, in Llinares, Sánchez García (2002), per determinarne le immagini su matematica, suo insegnamento ed apprendimento e sul significato che hanno i compiti scolastici; in questa direzione, citiamo infine il lavoro D'Amore, Fandiño Pinilla (2004) nel quale i soggetti analizzati dovevano appunto esprimersi mediante una lettera autobiografica.

2. Problemi di ricerca

Come abbiamo visto, in Fandiño Pinilla (2005) si evidenzia in primo luogo la discrasia esistente tra un'unica definizione dell'idea di frazione e diverse interpretazioni possibili di tale termine nella matematica, nella pratica matematica, nella pratica sociale, nel linguaggio quotidiano. Come abbiamo già detto, nel testo citato sono elencate 12 diverse interpretazioni, poche delle quali possono ritenersi correttamente basate sulla definizione iniziale usuale. Proprio sullo studio di tale testo, interpretato più sul versante "riflessioni dell'insegnante sulle proprie conoscenze" e dunque "convinzioni dell'insegnante" che non sul versante "difficoltà di apprendimento dello studente" sono basate le domande di ricerca che hanno dato il via a questo lavoro.
Tali domande sono di seguito elencate.

2.1 Domande di ricerca

Prima dello studio collettivo:
D1. Gli insegnanti di scuola dell'infanzia, primaria e secondaria di I grado conoscono diverse interpretazioni del concetto di frazione oppure ritengono che l'interpretazione di frazione sia univocamente determinata dalla sua stessa definizione? La definizione usualmente fornita dai libri di testo proposta agli allievi, è ritenuta corretta e soddisfacente?
D2. Quali sono le idee che hanno gli insegnanti di fronte al problema della trasposizione didattica per questo sapere?
Durante lo studio collettivo:
D3. Messi di fronte al sapere matematico concernente le frazioni, gli insegnanti sono disposti a cambiare convinzioni sia sul tema "frazioni", sia sulla relativa trasposizione didattica?
A seguito dello studio collettivo ed in termini di ricerca – azione:

D4. Che cosa comportano tali cambi di convinzioni sul piano dell'azione didattica?

2.2 Ipotesi di risposta alle domande di ricerca

Prima dello studio collettivo:

I1. A nostro parere, gli insegnanti di scuola dell'infanzia, primaria e secondaria di I grado non conoscono le diverse interpretazioni della frazione e, se ne conoscono più di una, al massimo ne sanno individuare due o tre. Generalmente, a nostro avviso gli insegnanti ritengono che l'interpretazione di tale concetto sia univocamente determinata dalla definizione "*frazionare vuol dire dividere in parti uguali*" che ritrovano nei libri di testo e che propongono agli allievi. Tale definizione è ritenuta corretta e soddisfacente, solo perché di facile comprensione.

I2. Riteniamo che gli insegnanti non si pongono particolari quesiti nei confronti della trasposizione didattica di tale sapere. L'idea che primeggia, e che risulta quasi univoca, è che il frazionamento in tante parti uguali dell'intero (di solito torta o tavoletta di cioccolata) sia un metodo significativo e valido perché si fissa con facilità nella mente degli alunni ed è di facile comprensione, quindi appare come vincente ed efficace.

Durante lo studio collettivo:

I3. Riteniamo che gli insegnanti, posti di fronte al sapere matematico concernente le frazioni, siano disponibili a cambiare le loro convinzioni, sia quelle sulle frazioni che quelle sulla relativa trasposizione didattica, pur manifestando, inizialmente, una certa diffidenza e una certa difficoltà ad accettare tale cambiamento e a saperlo trasferire nella propria azione didattica.

I4. Riteniamo che non sempre il cambiamento delle proprie convinzioni sia necessariamente legato ad un cambiamento sull'azione didattica. Per raggiungere tale scopo, il percorso è lungo e tortuoso, ma il confronto con il gruppo e l'appoggio collettivo agevolano la sua riuscita. Ossia, il cambio di convinzioni degli insegnanti sul piano dell'azione didattica comporta la messa in discussione delle metodologie e delle scelte fino a quel momento adottate. Riteniamo che ciò generi un disagio iniziale, dovuto alla perdita di punti di riferimento ritenuti certi ed efficaci. Riteniamo che in questa fase risulti fondamentale poter condividere con gli altri colleghi le difficoltà e i dubbi, per sperimentare nuove strategie e costruire insieme una nuova metodologia e nuovi possibili percorsi. In solitudine, pensiamo che sia più difficile vincere la crisi e l'incertezza provocata da nuove convinzioni, quindi è più difficile che avvenga il cambiamento nell'azione didattica. Una volta superata questa fase, riteniamo che si possa giungere ad una totale revisione della propria azione didattica e ad una sorta di fiducia sul futuro operato.

3. Ambito tematico e sociale della ricerca: descrizione del gruppo di insegnanti oggetto della ricerca

Il gruppo è formato da 36 insegnanti (8 di scuola dell'infanzia, 24 di scuola primaria, 4 di scuola secondaria di I grado), di diversi Istituti della provincia di Ancona. Da 6 anni lavorano e studiano insieme e questo dà loro sicurezza.
Ricorrendo alla tecnica della learning story, nella quale, però, questa volta i soggetti sono gli stessi insegnanti, si segue un percorso narrativo basato sulle dichiarazioni spontanee degli stessi insegnanti – ricercatori.

4. Quadro iniziale, motivazione e ricordo del percorso

Ormai da sei anni il nostro gruppo, seguito dalla prof.ssa Silvia Sbaragli, sta sperimentando un percorso di geometria dalla scuola dell'infanzia alla scuola secondaria di I grado che coinvolge il passaggio tra spazio e piano e viceversa (Arrigo, Sbaragli, 2004; Cottino, Sbaragli, 2005); si tratta di un vero percorso di ricerca - azione per noi del tutto nuovo.
Durante questo percorso formativo caratterizzato, oltre che dalla didattica, da vere e proprie lezioni di geometria, abbiamo provato lo stesso stupore e la stessa meraviglia dei nostri allievi confrontati con ogni nuova scoperta; tale percorso ha fatto crollare i nostri schemi usuali ed ha frantumato le certezze sulle quali avevamo costruito, fino ad allora, il nostro modo di fare geometria. In tutta questa "stravolgente" esperienza *il gruppo* è stato *la nostra forza.*
Ci siamo confrontate fra noi, abbiamo discusso a lungo e gradualmente siamo riuscite a compiere un cammino assai faticoso, ma che ci ha cambiate notevolmente: ha accresciuto le nostre conoscenze; ci ha rese più attente nei confronti delle nostre misconcezioni e di quelle degli alunni; ci ha portate a curare maggiormente il linguaggio, ad elaborare proposte il più possibile diversificate e ad evitare di dare subito definizioni, per offrire ai nostri allievi la possibilità di giungere alla costruzione dei concetti nel modo più ampio possibile.

Analizzando gli errori concettuali degli alunni in ambito geometrico, ci siamo trovate a dover riflettere in modo approfondito sulle nostre conoscenze e sulle nostre convinzioni per concludere e toccare con mano che le convinzioni errate o limitate degli insegnanti generano misconcezioni e ostacoli negli allievi. Non è stato facile ammettere che quello che ci mancava era il Sapere e non lo è tuttora, perché improvvisamente ci si sente inadeguati, insicuri, impreparati, proprio come afferma un'insegnante appartenente al gruppo: «Ammettere la propria non conoscenza in privato, dopo la lettura di un articolo o di un libro, è un conto, ammetterla di fronte a tutti i colleghi è ben altra cosa; eppure soltanto superando questo blocco si riesce a venirne fuori e solo esaminandoci a fondo e senza timori di confrontarci con gli altri riusciamo a capire meglio e a trasformare il nostro modo di lavorare».
Attraverso la sperimentazione di geometria, che continua ancora oggi, ci siamo rese conto che uno dei problemi sostanziali dell'insegnamento è la mancanza di una vera e propria *trasposizione didattica*; dobbiamo infatti purtroppo riconoscere che il nostro Sapere, in alcuni casi, è limitato e questo fa sì che le conoscenze da noi possedute relative ad un certo argomento coincidono con il sapere da insegnare. Tutto questo genera una serie di manchevolezze didattiche tra le quali ricordiamo: la mancata comprensione degli apprendimenti che produrranno le attività didattiche che proponiamo; l'impossibilità di interpretare se tali apprendimenti saranno utili alla costruzione di concetti, oppure creeranno misconcezioni nella mente dei nostri allievi, misconcezioni che, noi insegnanti, non siamo neppure in grado di riconoscere, interpretare e controllare.
I risultati largamente positivi di questa importante esperienza ci hanno fatto diventare più disponibili a compiere il lavoro di analisi critica delle nostre convinzioni e del nostro modo consueto di fare matematica; quindi, forti di queste riflessioni e del processo di cambiamento che era già iniziato in noi, ci siamo sentite preparate per affrontare un nuovo argomento senza troppe difficoltà; abbiamo così deciso di trattare il tema delle *frazioni*.
Dobbiamo dire, in tutta sincerità, che non pensavamo che questo argomento ci tenesse occupate così a lungo, anzi ci sembrava un tema abbastanza conosciuto e posseduto. Eravamo convinte che quella torta divisa in tante fette tutte "uguali" fosse un'immagine efficace, perché «faceva capire bene il rapporto tra l'intero e le sue parti, si fissava subito

nella mente dei nostri allievi e sentivamo di poter passare subito alla definizione che cristallizzava il "concetto" di frazione» (insegnante di scuola primaria).

Infatti, qual era la prassi consolidata prima di questa formazione? Una bella mattina, rigorosamente in terza primaria, senza aver mai discusso prima con i nostri alunni dell'uso quotidiano delle frazioni, ci presentavamo con la nostra torta che veniva ripartita in parti "*uguali*" tra i nostri alunni (più avanti analizzeremo in maniera approfondita e critica il significato di "uguale, ora che siamo in grado di farlo). Di questo sono testimonianza molte nostre affermazioni del tipo: «Sono arrivata a scuola con una torta e poi ho detto: Io dovrei dividerla in parti esattamente uguali, però non ci riuscirò mai, perché qui c'è una mollichina di più, di là c'è una briciolettta di meno…Io ci tenevo a dire loro che dovevano essere parti uguali!»; «Il giorno in cui sono arrivata con la crostata, i miei alunni, erano 17 e così, per dividerla meglio, mi sono aggiunta anch'io».

In seguito, scrivevamo sulla lavagna alcune frazioni ($\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{18}$,…), le facevamo leggere e subito rafforzavamo il loro significato spiegando che il numero che si scrive sotto il segmento orizzontale indica il numero di parti "*uguali*" in cui è stato diviso l'intero (detto denominatore), mentre il numero scritto sopra indica quante parti sono state prese (detto numeratore).

Insistevamo sul fatto che le parti dovevano obbligatoriamente essere "*uguali*", e di seguito rafforzavamo questo concetto facendo dividere in parti rigorosamente *uguali* (nel senso di congruenti), un foglio di carta, una tavoletta di cioccolata, una certa quantità di caramelle, alcuni pennarelli,…. senza accorgerci che per i nostri alunni queste proposte costituivano i primi ostacoli alla costruzione del concetto di frazione.

Anzi, nei giorni seguenti, proponevamo altre attività, tutte simili, badando bene che i nostri alunni sapessero replicarle. A questo proposito i libri e i sussidiari rafforzavano ancor più le nostre convinzioni e quelle degli allievi, perché vi trovavamo tanti esercizi affini a ciò che avevamo proposto; questo ci bastava per convincerci di aver svolto un buon lavoro, per ritenere che l'apprendimento da parte dei nostri alunni fosse stato raggiunto e che il concetto di frazione fosse stato costruito.

Però, a pensarci bene, c'era qualcosa che non ci faceva stare proprio tranquille: quando, trascorso un po' di tempo, riproponevamo attività e

problemi con l'uso delle frazioni e dei numeri decimali (la frazione inversa, i primi esercizi con le frazioni proposti alla scuola secondaria di I grado,…), improvvisamente i ragazzi entravano in crisi, si sentivano smarriti, sembravano non ricordare più nulla e così, insieme alle loro, vacillavano paurosamente anche tutte le nostre sicurezze.
Ma come? Era stato tutto così facile… sembrava che tutti avessero capito...
Proprio questo è stato il motivo che ci ha spinto ad andare più a fondo nella questione, e abbiamo iniziato ad occuparci di frazioni in modo più profondo e critico.

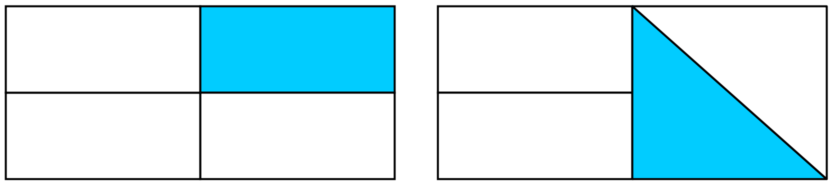
5. Le fasi della preparazione teorica

La nostra preparazione teorica si è sviluppata in tre diverse fasi.
1. Inizialmente abbiamo svolto un'*indagine iniziale* per valutare le nostre convinzioni.
Le informazioni raccolte in questa fase sono state confrontate con quelle ottenute dalla stessa indagine eseguita alla fine dell'anno con i nostri alunni di V primaria che avevano svolto il percorso sulle frazioni in modo "tradizionale". Abbiamo quindi ritenuto interessante per la nostra trattazione mettere in evidenza la coincidenza tra questi due tipi di convinzioni (vedi 5.1.).
Da questa indagine iniziale sono scaturite varie riflessioni e sensazioni all'interno del gruppo, riportate in 5.1.1., che ci hanno offerto lo spunto per impostare la formazione e cominciare il lavoro insieme.
2. Abbiamo poi avviato la formazione, intervallata da incontri di gruppo nei quali non erano presenti i formatori, ma solo noi insegnanti, con i nostri dubbi e le nostre convinzioni. Tali riflessioni avvenute durante la formazione sono riportate in 5.2.
3. Infine, a conclusione degli incontri di formazione, abbiamo indagato sui notevoli cambi di convinzioni che sono avvenuti nel nostro modo di intendere le frazioni; tali cambi sono riportati in 5.3., tramite le affermazioni più significative e condivise.

5.1. Prima fase: indagine iniziale

Come nostra consuetudine, ci siamo rivolte al Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica di Bologna per chiedere consiglio su come impostare il lavoro. In questa occasione, Bruno D'Amore, Martha Isabel Fandiño Pinilla e Silvia Sbaragli, ci hanno suggerito, prima di iniziare la formazione, di riflettere su cosa pensavamo noi insegnanti a proposito delle frazioni. Abbiamo quindi avviato un lavoro di riflessione basato sull'indagine delle nostre convinzioni iniziali.

Prima della formazione ci siamo poste queste domande:
1) Che cos'è per te una frazione?
2) Quando insegni, su quali aspetti della frazione punti di più?
3) In entrambe le figure, la parte evidenziata è $\frac{1}{4}$? Se sì, perché? Se no, perché?



[Le tre domande appartengono ad ambiti diversi: affettivo la prima, didattico la seconda e culturale la terza].
Queste stesse domande sono poi state rivolte agli allievi di V primaria al termine del percorso "tradizionale" intrapreso con noi insegnanti, riformulando la seconda domanda in questo modo: A scuola, quando hai incontrato ed utilizzato le frazioni?

Riportiamo di seguito le tipologie di risposte avute a queste domande, mettendo a confronto le convinzioni di noi insegnanti con quelle degli alunni. Per facilitare la lettura, identifichiamo le risposte delle insegnanti con "I" e quelle degli alunni di V primaria con "A".

1) Rispetto alla prima domanda le risposte più frequenti sono state:

I - «Una frazione è una parte dell'intero».
A - «È una o più parti di un intero o tutto l'intero che possono essere complementari quando addizioni due frazioni e in tutto formano un intero». (Luca)

I - «È una o più delle parti "uguali" dell'intero».
A - «La frazione è quando devo prendere una parte o delle parti uguali di qualche cosa». (Giacomo)

I - «È un'operazione che mi permette di dividere un intero in parti uguali e costruire multipli e sottomultipli dell'unità di partenza».
A - «È un conto che serve ad essere più precisi per dividere qualcosa in più parti uguali». (Sara)

I - «È una divisione particolare che indica il rapporto tra una parte e il suo intero».
A - «È come una specie di divisione solo con il procedimento inverso». (Filippo)

I - «La frazione è un numero per rappresentare parti di un intero».
A - «È un numero matematico che rappresenta le parti di una cosa». (Federico)

I - «La frazione è un rapporto fra numeri, quantità, lunghezze, superfici».
A - «È semplicemente un "calcolo" che indica una parte di un numero, ma anche di una quantità, di una lunghezza, del tempo…». (Luisa)

I - «La frazione è un modo di rappresentare le parti riferite ad un tutto».
A - «È un modo per sapere quante parti prendo su una cosa». (Matteo)

I - «È un numero che può indicare anche parti inferiori all'unità. Rappresenta una divisione».
A - «È una cosa che spiega ad esempio quanti oggetti vuoi o quanti pezzi di torta però non puoi superare il numero che è indicato sotto la linea di frazione». (Claudio)

I - «È suddividere un intero secondo un operatore e inversamente dalla frazione tornare all'unità. La frazione intesa come operatore che suddivide un intero».
A - «È una figura divisa in tante parti uguali oppure con le parti puoi ricostruire tutta la figura». (Davide)

I - «È la suddivisione in parti di un numero (o più interi). Indica separazione, divisione non necessariamente in parti uguali. Le parti sono uguali solo su frazioni "matematiche" che esprimono un rapporto preciso tra i due numeri separati dalla linea di frazione. Può indicare anche un intero, più interi ecc. sempre in riferimento ai due termini».
A - «Per me la frazione è una cosa che si divide in parti uguali, più o

meno una divisione. Solo che la frazione divide 1 cosa (una torta, un cerchio, una caramella, un oggetto), mentre la divisione divide più cose (numeri, oggetti...). Nella vita di tutti i giorni se devo dividere 1 torta con 3 amici la taglio in 4 parti uguali. Se devo stare sul divano con 3 amici non lo taglio con un coltello ma cerchiamo di occupare lo stesso posto in modo da starci tutti 4». (Matilde)
Come abbiamo mostrato, tra le più diffuse e frequenti affermazioni degli insegnanti e degli allievi c'è una netta coincidenza: quasi tutte rientrano nella stessa visione di frazione come parte di un tutto. In questo modo abbiamo potuto verificare ciò che afferma Zan (1998) a proposito delle convinzioni degli allievi: «Si può riconoscere che nella formazione delle convinzioni ha una notevole responsabilità il tipo di insegnamento ricevuto».
Per la seguente affermazione di un'insegnante, invece, non c'è stato un corrispondente tra le risposte degli allievi, segno evidente che l'aspetto della frazione come rapporto è stato poco o per nulla trattato:
I - «La frazione è una quantità o un'estensione in rapporto ad un'altra».

2) Tra le risposte alla seconda domanda rientrano le seguenti:
I - «Quando insegno punto di più a far comprendere quale relazione esiste tra una parte e il suo intero, a far considerare che cosa succede se si prendono più parti e come cambia il valore della frazione se cambia il numeratore».

A - «Per me una frazione è un "segno" ($\frac{2}{3}$) formato da una linea di frazione (-), da un numeratore (2) e da un denominatore (3), che secondo me, ma penso anche per gli altri, divide in tante parti quante quelle del denominatore e ne prende quante quelle del numeratore. A scuola io ho incontrato le frazioni in 3a quando la maestra ha portato la torta, ma le sto ripassando tuttora [quindi dalla 3a alla 5a]. Le utilizzo per dividere e ne conosco di diversi tipi: proprie ($\frac{3}{5}$), cioè che il numeratore si può prendere dal denominatore; improprie ($\frac{5}{3}$), cioè che non serve una sola "torta" divisa in 3 parti, ma ne servono 1 e 2 pezzi presi da un'altra "torta" (sempre divisa in 3 parti); e uno che non mi ricordo come si chiama, però significa questo: ($\frac{4}{8}$ – $\frac{8}{16}$) queste due frazioni hanno qualcosa in comune? Sì, perché il numeratore 4 è la metà del numeratore 8; invece il denominatore 8 è la metà del denominatore 16. Ci sono anche le frazioni complementari: sono due frazioni con lo stesso denominatore che formano un intero. Esempio: se io dico vorrei $\frac{1}{9}$, per formare un intero mi servono altri $\frac{8}{9}$». (Alice)

I - «La uso in situazioni problematiche di tipo diverso: aritmetiche, geometriche…».
A - «A scuola ho incontrato ed utilizzato le frazioni nei problemi di aritmetica e di geometria e le ho fatte in terza elementare». (Alessandro)

I - «Punto sulla rappresentazione grafica in concreto. Evidenzio la relazione con l'intero. Faccio notare gradualmente come la frazione si può scrivere sotto forma di numero decimale e occupa un posto sulla linea dei numeri».
A - «Le frazioni le ho utilizzate quando devo trovare delle parti di un intero, per esempio di una quantità di caramelle, di un disegno o quando si deve pronunciare un orario specifico tipo le una e $\frac{3}{4}$. Nella statistica invece le frazioni si trasformano in percentuali perché si dice 2% ma posso dire anche $\frac{2}{100}$ che è la stessa cosa o in numeri decimali. $\frac{5}{100}$ di 18= 0,90 18x5=90:100=0,90». (Luisa)

I - «Punto di più a fare le parti equivalenti di un tutto (figura ecc.), a fare le parti di una quantità (oggetti – numeri)».
A - «In geometria le frazioni mi servono quando bisogna dividere una forma oppure qualche volta la maestra ci dice "Voglio i $\frac{3}{4}$ di bambini che ci sono nella 5^aA" e allora noi facciamo dei conti poi ci dividiamo». (Elisa)

I - «Sull'acquisizione del concetto di frazione, sull'equivalenza, sul calcolo di quantità».

A - «Le frazioni ho iniziato a conoscerle in terza con le spiegazioni della maestra e sui libri e le ho ripassate per quasi tutta la quarta e anche un po' in quinta, ma poco. Le ho usate quando devo dividere qualcosa in parti uguali. Da quel che mi ricordo ci sono delle frazioni che sembrano diverse, perché se per esempio ho una torta e ne voglio i $\frac{2}{3}$ o i $\frac{4}{6}$, io prendo la stessa quantità». (Mattia)

Si può notare ancora una volta la forte corrispondenza che intercorre tra le risposte degli insegnanti e quelle degli allievi, pur essendo le affermazioni degli allievi molto più elaborate e ricche di particolari. Abbiamo così potuto verificare che il sapere sulle frazioni posseduto dagli insegnanti e che si ritiene sia importante trasferire ai propri allievi, è ciò che, effettivamente, viene appreso. Purtroppo, però, tale sapere risulta essere appiattito, limitato e assai lontano dal ricco concetto di frazioni che è necessario avere per effettuare una buona trasposizione didattica e per poter poi giungere alla costruzione del concetto di numero razionale nella scuola secondaria (Fandiño Pinilla, 2002).

3) La terza domanda, invece, rappresentava per noi più che altro una verifica del percorso intrapreso precedentemente in geometria. In effetti, tutte le insegnanti del gruppo hanno riconosciuto che in entrambe le figure è colorato $\frac{1}{4}$ dell'estensione e che quindi quella parte colorata rappresentava $\frac{1}{4}$ anche se la figura non era stata divisa in parti congruenti. Ossia, tutte noi ci siamo collocate in un contesto geometrico, questo perché avevamo svolto moltissime esperienze sull'equiestensione di figure e, con noi, anche gli alunni. Ma, ritornando a ritroso negli anni, ricordiamo ancora le riflessioni su questo argomento che avevano sradicato completamente le nostre convinzioni. In precedenza, infatti, eravamo convinte che la seconda parte evidenziata non rappresentasse $\frac{1}{4}$ perché le figure non erano state divise in parti "uguali" nel senso di "congruenti", sovrapponibili mediante un movimento rigido in modo che coincidessero tutti i punti dei contorni delle figure. Ossia non accettavamo che le figure fossero divise in parti di forma diversa. Però grazie a tutto il lavoro svolto sulla geometria, finalmente questo sapere,

in questo particolare ambito, era davvero posseduto.
Ci limitiamo a presentare i seguenti esempi come testimonianza delle nostre convinzioni.

I - «La zona colorata nella prima figura è equivalente alla zona colorata nella seconda figura».
A -«L'intero rettangolo è diviso in quattro rettangoli equivalenti: i loro lati sono la metà dei lati del rettangolo grande. Il triangolo è la metà della metà del rettangolo grande». (Samuele)

I -«Entrambi sono equivalenti, anche se sono divise diversamente».
A - «Sì perché, anche se nella seconda figura non sembra, i triangoli formano un rettangolino che è la metà della figura». (Davide)

I - «Ogni parte colorata rappresenta una quarta parte dell'intero».
A -«In entrambi i casi la figura è suddivisa in 4 parti che occupano la stessa superficie, quindi sono equivalenti». (Giulia)

I - «Rappresenta una stessa porzione di superficie, anche se la forma è diversa. Il triangolo, nella seconda è equivalente al rettangolo».
A - «Sì perché nella prima figura il rettangolo è diviso in 4 forme uguali e ne è colorata 1. Invece nella seconda figura il rettangolo è diviso prima in 2 rettangoli, che poi verranno tagliati a metà, ma in un modo diverso, però è sempre metà, perciò anche l'area è uguale, quindi è $\frac{1}{4}$». (Simone)

I - «In tutti e due i casi è la quarta parte della figura. Anche se rappresentata in modo diverso».
A - «Sì, perché la parte evidenziata è la metà della metà e cioè un quarto». (Francesco)

Questo modo di procedere, basato sull'analisi delle convinzioni degli allievi messe a confronto con le nostre, è risultato veramente utile per avviare il successivo cambio di convinzioni. Questo è in linea con ciò che afferma Pehkonen (1995), quando sostiene che le due strategie principali per promuovere il cambio di convinzioni negli insegnanti sono: il cambio di ruolo (l'insegnante deve identificarsi con lo studente) e il cambio di punto di vista (l'insegnante intervista uno studente e poi analizza l'intervista secondo il punto di vista dell'allievo). Risultati simili sono riportati da Krainer e Posch (1996) che indicano nell'attività

di intervista fatta dagli insegnanti agli allievi, un punto iniziale e prezioso per il cambiamento delle convinzioni degli insegnanti, puntando ad ascoltare attentamente le idee degli allievi e a riflettere in seguito sulla loro comprensione dei concetti, così come sul processo di intervista. Inoltre, in Krainer (1998) viene mostrato il caso di un insegnante di matematica che cambiò le proprie convinzioni dopo aver analizzato il proprio insegnamento.
Tutto questo è stato il nostro punto di partenza, per poi riflettere in profondità sul sapere in gioco.

5.1.1. Sensazioni e riflessioni degli insegnanti del gruppo prima della formazione

Già dalle riflessioni in gruppo sulle risposte raccolte attraverso l’indagine iniziale, abbiamo percepito che qualcosa ci stesse sfuggendo: sentivamo di non avere sufficiente padronanza dell’argomento, ma inizialmente ognuna di noi reagiva e viveva il problema in modo diverso. Le insegnanti di scuola dell’infanzia si sentivano un po’ fuori della questione perché ritenevano che le frazioni non le riguardassero più di tanto: «Le frazioni non si trattano. Però capita di fare le parti uguali con le caramelle, oppure quando si fanno attività manipolative, con il pongo, con la frutta… I bambini individuano subito se ci sono parti diverse e lo segnalano come “ingiusto”».
Le insegnanti di prima e seconda primaria erano tranquille perché non avevano ancora cominciato a lavorare sulle frazioni, quindi potevano trarre buone indicazioni dal lavoro del gruppo per intraprendere il cammino nel modo migliore. In ogni caso, queste insegnanti ammettevano che talvolta presentavano situazioni in cui erano presenti le frazioni: «Quando dividiamo a metà, quando facciamo l’orologio,…».
Chi si sentiva indubbiamente più colpito e coinvolto erano le insegnanti di terza, quarta e quinta primaria, perché stavano lavorando proprio sulle frazioni: «È dalla classe terza che propongo attività con le frazioni, però i ragazzi se le dimenticano e, anche se fatte più volte, trovano difficoltà».
Le insegnanti di scuola secondaria di I grado, invece, si erano sentite sollevate per il fatto che, finalmente, era emersa la questione; principalmente nella speranza che le colleghe della scuola primaria riuscissero a risolvere i problemi rilevati ogni anno: «Anche se hanno già fatto le frazioni alle elementari, bisogna sempre ricominciare, perché

per i ragazzi è difficile»; «I ragazzi dividono per il numero che sta sotto e moltiplicano per il numero che sta sopra, ma non sempre sanno perché lo fanno»; ma erano anche spinte dal desiderio di continuare a intraprendere nel migliore dei modi il cammino già avviato nel livello scolastico precedente.
Pur variando le esigenze e le sensazioni, abbiamo deciso di darci forza l'un l'altra e di stare unite come gruppo, con lo scopo di apprendere finalmente questo Sapere, senza pensare inizialmente alla trasposizione didattica da effettuare in aula.
Per questo abbiamo deciso di intraprendere prima possibile l'attività di formazione culturale.

5.2. Durante la formazione

Abbiamo quindi avviato la formazione nella quale sono state esaminate le 12 diverse interpretazioni delle frazioni così come sono presentate in Fandiño Pinilla (2005): frazione come parte di un uno-tutto (continuo – discreto), come quoziente, come rapporto, come operatore, in probabilità, nei punteggi, come numero razionale, come punto di una retta orientata, come misura, come indicazione di quantità di scelta su un tutto, come percentuale, nel linguaggio quotidiano.
La scoperta di così tanti aspetti per le frazioni ha scatenato un vero e proprio terremoto. Se da una parte la formazione è stata illuminante, dall'altra ha creato un po' di panico, facendo traballare tutte le nostre certezze sulle frazioni. In effetti, abbiamo riconosciuto negli esempi proposti le nostre manchevolezze e ci siamo rese conto che dietro la parola "frazione" si nascondono molte interpretazioni diverse che danno senso al concetto, mentre la nostra scelta scolastica univoca di "frazione" come parte di un uno-tutto, non concettualizzava affatto tutti i molteplici aspetti.
Pur avendo provato un certo smarrimento iniziale, abbinato alla preoccupazione di non essere all'altezza delle proposte e al disagio di non sentirsi adeguatamente preparate, abbiamo comunque assunto un atteggiamento positivo fin dai primi momenti, anche perché le esperienze precedenti sulla geometria avevano rafforzato il gruppo e lo avevano selezionato e irrobustito culturalmente. Erano già forti in noi la voglia di sapere, di approfondire, di confrontarci con i formatori, tra noi e personalmente. A questo proposito un'insegnante afferma: «Gli incontri, sia tra noi che con Martha, Bruno e Silvia, ci hanno offerto

mille motivi per riflettere sul nostro operato, sulle nostre convinzioni iniziali e sui primi cambiamenti, ma ora si rendono indispensabili soprattutto riflessioni individuali e collettive».
Ancora una volta abbiamo dovuto prendere atto della distanza tra il nostro sapere e il Sapere con la S maiuscola; ci siamo rese conto che l'argomento "frazioni" interessa tutti i livelli scolastici e rappresenta un tema molto complesso, interessante e coinvolgente.
Il nostro percorso, tra una formazione e l'altra, è stato strutturato in questo modo:
- riflessioni personali e di gruppo;
- studio personale e di gruppo (per approfondire le nostre conoscenze e superare eventuali misconcezioni);
- ripensamenti sulle pratiche didattiche usuali;
- socializzazione di aspetti affettivi, didattici e culturali.

Tutto questo ha avviato il nostro cambio di convinzioni.

5.3. Cambi di convinzioni a seguito della formazione

Per un anno le frazioni sono state argomento di studio, di riflessione individuale e di discussione all'interno del gruppo. Senza alcuna remora, abbiamo messo a confronto le nostre esperienze, esternando i dubbi ed approfondendo senza timore i diversi aspetti che ci venivano proposti; questo ci ha obbligato a compiere analisi sempre più profonde e significative. Abbiamo compreso che l'insoddisfazione che inizialmente nutrivamo nei confronti dei nostri allievi per le difficoltà che incontravano nell'affrontare le frazioni, dipendeva dai nostri stessi dubbi a volte nascosti e profondi, non emergenti, e dalle nostre incertezze, ossia dalle nostre analoghe difficoltà. Questo non ci ha spaventato, anzi; quando, a conclusione del lavoro, ci è stato proposto un altro questionario, abbiamo risposto tranquillamente, senza il timore di manifestare le nostre precedenti convinzioni eventualmente sbagliate e il cambio di convinzioni che ormai era cominciato in tutte noi.
Di seguito riportiamo il questionario che ci è stato proposto dai formatori alla fine della formazione:

1. La definizione di frazione che si trova nei libri di testo, l'avevi mai messa in discussione prima? Ora l'hai messa in discussione? Perché?
2. Pensavi che la frazione avesse tante interpretazioni diverse? E ora?
3. Nel contesto parte/tutto, ti eri resa conto prima dell'importanza delle diverse rappresentazioni delle frazioni in contesti continui e discreti? E

ora, te ne sei resa conto?
4. Di tutte le interpretazioni possibili delle frazioni, a quali davi più enfasi prima? E ora?
5. A quale delle interpretazioni del concetto di frazione non avevi mai pensato prima? E ora, che cosa pensi?
6. A quale insieme numerico appartiene il risultato di 6:5? Che cosa pensavi prima? E che cosa pensi adesso?
7. Prima, ti piaceva di più usare le frazioni o i numeri con la virgola? E adesso? Perché?
8. Quali erano le tue sensazioni prima riguardo alle frazioni? E adesso?
9. Che cosa pensavi prima della distinzione delle frazioni in propria, impropria e apparente? E adesso?
10. Adesso che conosci la problematica delle frazioni, ti senti più o meno sicura? Perché? Come ti sentivi prima, da questo punto di vista, e come ti senti ora?
[Queste dieci domande rientrano in tre differenti àmbiti: 1, 2 e 6 nel culturale; l, 4, 7, 8 e 10 nell'affettivo e 3, 5, 9 nel didattico].
Per ogni risposta abbiamo deciso, per ragioni di spazio, di selezionare due frasi, quelle che riteniamo più esemplificative, indicando con P le affermazioni delle insegnanti che si riferiscono a *Prima della formazione* e con D le affermazioni riferite a *Dopo la formazione*.
Le risposte selezionate per far capire l'avvenuto cambio di convinzioni sono riportate di seguito, precedute da un breve riepilogo.

1. Nessuna insegnante prima della formazione aveva mai messo in discussione la definizione di frazione trovata sui libri di testo, ma dopo la formazione tutte noi siamo convinte che la definizione con la quale solitamente ci confrontiamo non concettualizza correttamente il complesso significato di frazione in tutte le sue interpretazioni.
P: «Non avevo mai messo in discussione la definizione di frazione».
D: «Ora l'ho messa in discussione perché, seguendo i relatori di questo corso, ho riflettuto sul termine "parti uguali" e ho compreso che questa definizione non corrisponde al significato di frazione. Ad esempio un quarto dell'estensione di una figura può avere una forma non uguale alle altre complementari. Oppure posso prendere un terzo di un segmento e non dividere la parte rimanente (due terzi)».
P: «Non avevo mai messo in discussione la definizione dei libri di testo… mi andava bene così, rispecchiava esattamente la mia idea».

D: «Ora mi sono resa conto che questa definizione è imprecisa e non tiene conto dei numerosi significati che la frazione può assumere e dei vari contesti d'uso. Inoltre è così facile che si fissa immediatamente: pensavo che questo fosse un vantaggio, invece mi sono resa conto che genera difficoltà».

2. Tutte noi conoscevamo e proponevamo solo alcune delle interpretazioni delle frazioni, ma a conclusione del nostro percorso formativo, riteniamo di dover rivedere le nostre proposte didattiche, arricchendole di esperienze che coinvolgano tutti i diversi significati.
P: «Conoscevo la frazione come rapporto, come relazione parte-tutto, come operatore, come divisione e corrispondenza con il numero decimale. Non avevo mai pensato, né considerato, a livello didattico, altre interpretazioni».
D: «Ora ho preso in esame altre interpretazioni: nella probabilità, come numero razionale, come misura, nei punteggi».
P: «Sì, pensavo che la frazione avesse alcuni significati diversi, ma non avevo considerato tutti quelli che sono stati illustrati. Non consideravo affatto, per esempio, l'uso particolare della frazione nei punteggi, pur usandola abitualmente quando i bambini fanno questionari o eseguono esercizi ai quali si può attribuire un punteggio (come valutazione), non avevo mai riflettuto sul fatto che il punteggio di una scheda $\frac{5}{10}$ sommato al punteggio di una seconda scheda $\frac{5}{8}$ fa $\frac{10}{18}$».
D: «La frazione assume molteplici significati nel processo di insegnamento - apprendimento: il più utilizzato in classe è senz'altro quello di parte di un uno-tutto, a volte continuo, a volte discreto. Dall'incontro ho capito l'importanza di presentare molteplici usi della frazione come quoziente, come rapporto, come operatore, in probabilità, nei punteggi, nella geometria, nella vita quotidiana ecc.».

3. Ci siamo rese conto che non facevamo distinzione tra contesto continuo e discreto pur fornendo confuse attività in entrambi gli àmbiti. In particolare, evitavamo di proporre frazioni nel discreto che non potessero essere rappresentate. Per un insieme formato da 12 persone potevamo chiedere di trovare $\frac{1}{2}$ o, al limite, i $\frac{2}{3}$, ma evitavamo di

ragionare ad esempio su $\frac{1}{5}$ di tale insieme, essendo impossibile da trovare in concreto. Dimenticavamo di far notare che solo in teoria l'unità continua si può sempre frazionare, perché dividere concretamente un foglio in $\frac{120}{379}$, non è una cosa semplice! In generale, evitavamo situazioni per noi ritenute difficili, ambigue o particolari, evitando così una reale profonda riflessione sul sapere.
P: «Non avevo mai distinto i contesti continuo e discreto, ma avevo trattato indistintamente il tutto».
D: «Riconosco l'importanza di considerare se il contesto è continuo o discreto nella rappresentazione di frazioni, perché la stessa frazione può presentare delle differenze, ad esempio nel discreto non sempre è possibile la rappresentazione».
P: «Usavo senza distinzioni le frazioni nel continuo e nel discreto, anche se facevo attenzione a non proporre esempi impossibili».
D: «Ora ho acquisito una maggiore consapevolezza in relazione al fatto che, in un contesto discreto, non tutte le frazioni si possono rappresentare e sono convinta che questo vada compreso anche dagli alunni. Intendo presentare situazioni, nel discreto, in cui possa emergere il problema, così da poterlo affrontare insieme agli alunni».

4. Prima trattavamo le frazioni iniziando dall'interpretazione della parte di un uno-tutto, ma ora riteniamo importante introdurre questo argomento partendo dalle convinzioni degli allievi senza sottovalutare l'uso delle frazioni nella vita reale. Inoltre, a questo punto del nostro percorso, crediamo che sia fondamentale considerare tutti i diversi aspetti della frazione, inserendoli gradualmente in contesti significativi e diversificati che facciano uso di un linguaggio corretto.
P: «Prima davo più enfasi alla relazione parte-tutto, alla frazione sia come operatore che come divisione, senza considerare l'uso della frazione nella vita reale».
D: «Ora credo importante affrontare tutti gli aspetti delle frazioni, senza mettere in particolare risalto l'uno o l'altro. Mi sono resa conto che è necessario, prima di tutto, scoprire ed evidenziare l'uso delle frazioni nella vita di tutti giorni e poi differenziare gli approcci e considerare i vari contesti per dare un'idea più completa».
P: «Prima davo più enfasi alla frazione come parte di un intero».

D: «Più che dare enfasi cercherò di evitare errori già compiuti. Proporrò situazioni diversificate nel continuo e nel discreto, cercando di porre l'attenzione ai vari attributi in base ai quali occorre frazionare e ai diversi aspetti della frazione; evidenzierò il fatto che non tutte le frazioni sono spendibili in ogni situazione e cercherò di usare la parola uguale legata all'attributo a cui si riferisce».

5. Già subito dopo il primo incontro di formazione, ci siamo rese conto che in realtà non avevamo sufficiente consapevolezza delle diverse interpretazioni che pure incontravamo nelle nostre esperienze quotidiane.
P: «Anche se non avevo mai trasferito nella didattica alcune interpretazioni delle frazioni, ne avevo sentito parlare. Non avevo mai pensato alle difficoltà e agli equivoci che si possono generare nel trattarle in modo parziale».
D: «Ora ho capito che è importante che vengano percepiti dai bambini i diversi significati e usi delle frazioni, solo così è possibile costruire in modo più completo il concetto».
P: «Prima puntavo di più a far comprendere quale relazione esiste tra una parte e il suo intero, a far considerare che cosa succede se si prendono più parti e come cambia il valore della frazione se cambia il numeratore».
D: «Ora uso le frazioni in situazioni problematiche di tipo diverso: aritmetiche, geometriche, probabilistiche; uso di più proposte in cui date alcune parti si deve ricomporre l'intero e invito gli alunni a mettere a confronto i diversi modi di scrivere e rappresentare frazioni e numeri decimali».

6. Il risultato di 6:5 veniva inserito da alcune di noi nell'insieme dei numeri naturali. Ossia, alcune insegnanti erano convinte che l'operazione di divisione fosse sempre eseguibile nell'insieme dei numeri naturali, ottenendo a volte un resto e a volte no, che rappresentavano in entrambi i casi numeri naturali (per 6:5 si ottiene 1 con resto 1, dunque due naturali!). A causa dell'illusione generata dal resto e dalla distinzione linguistica presente nei libri di testo per le divisioni con resto e senza resto, che verte su due denominazioni per il risultato della divisione: quoto e quoziente, non avevamo quindi ben chiaro che le divisioni non sempre sono eseguibili in questo insieme numerico, anzi. Dopo la formazione abbiamo capito che, così come avviene per la sottrazione, che non sempre è eseguibile nell'insieme dei numeri naturali, anche per la divisione è analogo; per questo si amplia l'insieme dei naturali con i numeri razionali e siamo oggi in grado di affermare con convinzione che la divisione non è interna all'insieme dei numeri naturali.

P: «Prima lo indicavo semplicemente come una divisione con resto 1; se ho 6 cioccolatini da distribuire fra 5 bambini, ne do 1 ciascuno e ne avanza 1».

D: « Non avevo riflettuto sul fatto che una divisione con resto, nell'insieme dei naturali, fosse in realtà una divisione non riuscita perché, come in questo esempio, dividerei soltanto 5 cioccolatini, non 6. Ora tutto mi è più chiaro: il risultato di 6:5 appartiene all'insieme dei numeri razionali e solo spostandoci in questo insieme numerico è possibile eseguire tutte le divisioni».

P: «Prima non mi ponevo la domanda, perché, come in genere si fa, proponevo sia divisioni senza che con il resto. Quindi questa era una divisione con il resto».

D: «Ora inserirei il risultato di questa operazione nell'insieme dei numeri razionali».

7. Quando parlavamo di frazioni e di decimali avevamo una certa confusione, non puntavamo affatto l'attenzione sul fatto che sono rappresentazioni diverse dello stesso numero razionale. Per questo motivo, prima trattavamo le frazioni, poi facevamo il passaggio ai numeri decimali e proseguivamo parallelamente, senza far notare che si trattava dello stesso sapere. Difficilmente, ad esempio, proponevamo situazioni problematiche in cui fossero presenti indifferentemente frazioni e numeri decimali. Dopo la formazione riteniamo opportuno favorire occasioni che possano facilitare la comprensione dell'equivalenza delle diverse rappresentazioni dello stesso concetto, mettendo però anche in evidenza i contesti d'uso differenti che fanno sì che rappresentazioni diverse non siano sempre interscambiabili, poiché non assumono sempre lo stesso significato.

P: «Dopo l'introduzione delle frazioni, si passava ai numeri decimali. Non avevo preferenze per l'uno o per l'altra, ma poi procedevo quasi su due binari separati, tranne che per alcuni esercizi di trasformazione. Non ho mai presentato uno stesso problema, ad esempio, con una frazione e poi con il numero decimale corrispondente».

D: «Ora mi rendo conto che devo cercare strategie adeguate per far capire che sono rappresentazioni diverse dello stesso numero e che potrebbero essere usate indifferentemente, anche se il contesto ha una grande influenza, poiché non fa lo stesso effetto, quando si parla di uno sconto, dire il 25%, oppure $\frac{1}{4}$, oppure lo 0,25».

P: «L'argomento frazioni non mi è mai dispiaciuto e ho collegato a queste il numero decimale».

D: «Ora che conosco meglio l'argomento, lo affronto con più cautela cercando di fare in modo che le diverse rappresentazioni non generino equivoci. Ritengo che sia opportuno proporre attività in cui gli alunni possano loro stessi scoprire l'equivalenza delle diverse rappresentazioni».

8. Prima pensavamo che l'argomento frazioni fosse facile, ritenevamo infatti sufficiente insegnarlo quasi allo stesso modo in cui lo avevamo imparato. Dopo la formazione ci siamo rese conto che è un argomento molto complesso e profondo, che richiede prima studio e poi una profonda riflessione per essere proposto.

P: «Pensavo di conoscere almeno la definizione corretta, ma ho dovuto rivederla».

D: «Lo ritengo un argomento molto complesso che va impostato nella scuola primaria, ma si sviluppa per la maggior parte in seguito. Va presentato comunque nelle sue diverse interpretazioni per non creare un modello unico, difficilmente modificabile. Penso ad esempio alle numerose divisioni di figure geometriche piane. È necessario variare usando anche oggetti tridimensionali e segmenti, inoltre ho capito che insistere troppo su questo modello interpretativo può causare una certa rigidità nella formazione del concetto. Un altro aspetto che devo rivedere è la frazione come operatore. Ho sempre affrontato a lungo il calcolo della parte frazionaria, conoscendo l'intero e solo dopo molto tempo ho presentato il calcolo dell'intero partendo dalla frazione. Anche questi due aspetti andrebbero affrontati in tempi ravvicinati».

P: «Le frazioni erano, secondo me, un argomento facile, non mi dava preoccupazione introdurle, era molto intuitivo… mi ricordo ancora di una crostata preparata da una mamma proprio per l'occasione, … né mi preoccupava lavorarci in seguito».

D: «È vero, quella "maledetta" crostata portata a scuola e che pensavo funzionasse tanto bene, è rimasta indelebile nella mente degli alunni, ero convinta che bastasse insegnare le frazioni così come le avevo imparate io ma mi sbagliavo**…** Ora che ho chiarito i miei dubbi, sto procedendo con più cautela per evitare gli errori fatti nel passato».

9. A proposito della classificazioni delle frazioni in proprie, improprie e apparenti, seguivamo le indicazioni dei libri di testo, quindi tutte la proponevamo. Ci sentivamo molto tranquille nell'affrontare questa classificazione che ritenevamo di fondamentale importanza. Dopo la formazione ci siamo rese conto che non è poi così determinante, anzi può generare confusione.

P: «Lo ritenevo opportuno. Tutti i testi riportavano questa distinzione e io trovavo una corrispondenza tra frazioni proprie e numeri compresi tra 0 e 1, tra frazioni improprie e numeri maggiori di 1 e tra frazioni apparenti e numeri naturali».

D: «Adesso ho capito che questa distinzione non è necessaria immediatamente, piuttosto crea incongruenze. Ad esempio, se chiedo ad un alunno di colorare $\frac{5}{4}$ di un foglio, lui si troverà nella condizione di dover prendere non uno, ma due fogli e colorarne uno intero e $\frac{1}{4}$ dell'altro. Ma se abbiamo definito la frazione come parte di un'unità tutto, diventa poi difficile giustificare e comprendere la classificazione della frazione impropria che prevede che si considerino degli interi e delle parti di essi. Come fa quel bambino a riconoscere qual è l'unità in gioco? Mi sembra una questione piuttosto complessa e, visto che non è necessaria, non la affronterò subito».

P: «Ho usato la frazione propria per rappresentare un numero decimale minore di 1, la frazione impropria per rappresentare un numero decimale maggiore di 1 e quella apparente per rappresentare interi. Ci ho sempre lavorato riferendolo al significato parte tutto, senza troppe preoccupazioni».

D: «Dopo la formazione mi sono convinta che questa classificazione ha poco senso ed è molto rischiosa, perché può creare confusione nei nostri alunni, quindi non la proporrò subito».

10. Ora che conosciamo meglio la problematica delle frazioni e ci siamo appropriate della teoria, paradossalmente abbiamo perso quella sicurezza

che era determinata dall'idea della frazione come argomento facile da affrontare e di immediata comprensione. Con la consapevolezza acquisita, siamo pronte, però, a rivedere le nostre vecchie proposte e a ricostruire una didattica più efficace.
P: «Prima mi sembrava di far bene il mio dovere d'insegnante: mi documentavo sui vari testi cercando attività sia pratiche che grafiche da proporre agli allievi, ma non potevo valutare se quelle proposte rappresentavano delle insidie per la corretta costruzione del concetto di frazione».
D: «Ora mi sento più preparata, sono consapevole dei vari aspetti delle frazioni e sono convinta che tutti debbano essere considerati e affrontati. Cercherò di creare contesti stimolanti in cui i miei alunni le possano esplorare e mettere in relazione».
P: «Prima non mi rendevo conto delle tante implicazioni e dei possibili messaggi fuorvianti trasmessi attraverso termini usati in modo non del tutto appropriato».
D: «In questo periodo, grazie ai nostri incontri, alla formazione e alla progettazione di un percorso di lavoro con le colleghe, ho riflettuto molto sulle diverse interpretazioni del concetto di frazione e sull'uso del linguaggio e ora mi sento preparata per affrontare questo argomento con i miei alunni».

Il cambio di convinzione era oramai avviato in tutte noi, ma la capacità di trasferirlo in classe seguendo una nuova impostazione è stato un traguardo difficile da ottenere e che continua ancora oggi. Di questo è testimonianza la seguente affermazione di un'insegnante: «Quando abbiamo iniziato la formazione quest'anno avevo già finito di fare tutti i danni che potevo fare, allora il mio più grosso problema è stato: rimedio o faccio finta di niente? Vigliaccamente ho scelto con i bambini di far finta di niente… con loro, ma non con me stessa… adesso devo rimettere tutto in discussione. Mi sento più preparata ad affrontare l'argomento con maggiore consapevolezza e il prossimo anno, sperando che si siano dimenticati come sempre fanno i bambini, ricomincerò da capo».

6. Alcune puntualizzazioni su aspetti specifici

Durante le nostre riflessioni individuali e collettive abbiamo compiuto anche alcune considerazioni sulle principali difficoltà di apprendimento dei nostri alunni, esaminando insieme le situazioni e le proposte didattiche più frequenti per cercare di riconoscere quegli ostacoli didattici che generano negli alunni misconcezioni spesso "evitabili" (Sbaragli, 2005). Le riportiamo di seguito, supportate da qualche testimonianza delle insegnanti del gruppo.

Uso generalizzato della parola "uguale" e importanza del linguaggio

Abbiamo discusso a lungo sull'aggettivo "uguale" che usavamo con grande disinvoltura, in modo generico e improprio, sottintendendo l'attributo al quale doveva riferirsi la frazione e lasciandolo come sinonimo di congruente. Ci siamo rese conto che davamo generalmente per scontato che i bambini considerassero l'attributo che noi avevamo in mente e, senza preoccuparci di esplicitarlo, talvolta usavamo "uguale" per "congruente", altre volte per "equinumeroso", "equiesteso", "equivolumetrico"...

Dopo le nostre riflessioni e le prime esperienze, abbiamo compreso quanto sia importante discuterne in maniera chiara con gli alunni e coinvolgerli sin dall'inizio in questa problematica.

Riflettendo con gli alunni, siamo ora convinte che, prestando una maggiore attenzione all'uso del linguaggio, è possibile migliorare e semplificare l'apprendimento dei bambini fin da molto piccoli, mettendo in evidenza che le frazioni sono presenti nel quotidiano di ciascuno di noi e quindi nel linguaggio comune, ed andando ad esplorare i diversi usi e significati dei termini.

Ecco che cosa afferma a tal proposito un'insegnante:

«Ho riflettuto molto sulla parola "uguale" e sull'uso generico che ne facciamo, sottintendendo, spesso, il significato che noi vogliamo attribuirle. Per me, quando dicevo parti uguali di 24 caramelle, era sottinteso che quell'"uguale" si riferisse al numero, ma solo ora mi rendo conto che forse non era così anche per i bambini. Ho compreso che ciò è ancora più evidente nelle figure geometriche: parti uguali, nel senso di congruenti, e… parti equiestese pur non avendo la stessa forma. Ora faccio molta attenzione all'uso del linguaggio e ogni volta specifico che cosa intendo considerare "uguale"».

Uso di figure non standard

Abbiamo ripensato al fatto che, di solito, quando volevamo proporre attività di frazionamenti in contesti continui, presentavamo ai nostri alunni solo figure "facili" da frazionare che, ovviamente, finivano con l’appartenere sempre alla solite due-tre tipologie. Così facendo, però, non ci accorgevamo di generare in loro la convinzione che non si possono trovare frazioni di tutte le figure piane e solide; anzi, i ragazzi pensavano che fosse possibile trovare frazioni *solo* per alcune particolari forme.

Ora siamo convinte che sia indispensabile usare indistintamente cerchi, rettangoli, quadrati, cubi e parallelepipedi (quelle figure che generalmente troviamo sui testi scolastici), ma anche presentare forme stravaganti proponendo di trovare strategie adeguate per frazionarle.

Riportiamo la testimonianza di un’insegnante:

«Se ripenso alle numerose divisioni di figure geometriche piane che proponevo, mi rendo conto di quanto fossi scontata e ripetitiva, ora sono convita che occorre variare le proposte usando lunghezze, estensioni e volumi da frazionare».

La frazione inversa

Un altro argomento sul quale ci siamo soffermate a riflettere è quello del passaggio da una frazione all’unità che le ha dato origine.

Di solito proponevamo situazioni problematiche “inverse” soltanto agli alunni più grandi ed in genere erano di questo tipo:

Nel portafogli ora ho 10 euro che sono $\frac{1}{5}$ di quello che avevo prima. Quanto avevo prima nel portafogli?

A questo proposito alcune di noi sostenevano:

«In terza e in quarta si fa prevalentemente il lavoro dall’intero alla parte, ma in quinta gli alunni calcolano anche la frazione inversa».

«Io, specialmente in quinta, propongo attività con la frazione inversa, però mi sembra che i ragazzi eseguano il compito meccanicamente senza aver capito perché si divide per il numeratore e si moltiplica per il numeratore. Se ripropongo questi problemi dopo un po’, tutti si trovano in difficoltà».

Dopo la formazione, le nostre convinzioni sono cambiate: riteniamo che sia importante presentare una grande varietà di situazioni problematiche “inverse”, sia nel contesto discreto che nel continuo, e farlo contemporaneamente, cominciando dalle situazioni più semplici. Ad esempio, nel continuo, si possono proporre attività in cui, considerate le parti di un ipotetica figura unidimensionale, bidimensionale o tridimensionale, l’alunno ne deve ricostruire varie possibili unità di

partenza.
Ecco l’affermazione di un’insegnante:
«Non avevo pensato, per ricostruire l’intero partendo da una frazione che ne rappresenta una sua parte, di proporre ai ragazzi anche attività con le figure geometriche. Ora certamente lo farò perché sono convinta che per l’apprendimento delle frazioni sia necessario creare e presentare agli alunni molte situazioni inverse. Così facendo i ragazzi si rendono conto che il loro compito non è quello di “indovinare l’unica soluzione che ha in mente l’insegnante”, ma possono sperimentare, trovare e mettere a confronto più soluzioni corrette ad un’unica richiesta. È anche importante osservare come, con questi tipi di situazioni problematiche, si perda l’uso iniziale di numeratore e denominatore perché qui andiamo a dividere per il numeratore e moltiplichiamo per il denominatore».

Importanza di trattare le frazioni in modo naturale

Generalmente si parlava di frazioni in terza primaria senza aver mai fatto notare prima la frequenza con la quale esse vengono usate nel linguaggio quotidiano, dove il senso scolastico di frazione spesso si perde e viene sostituito da altri significati. Pensiamo ad esempio alla lettura dell’orologio, agli sconti e alle percentuali che ci troviamo a dover calcolare, e ancora in musica, nelle ricette di cucina, nei medicinali, durante i giochi nei calcoli di punteggi e potremmo continuare con tanti altri esempi.
Dopo la formazione abbiamo ben compreso quanto sia importante, per la costruzione di questo concetto, invitare gli alunni a ricercare esempi di frazioni sulla base del loro vissuto.
Un’insegnante sostiene quanto segue:
«Prima di questi incontri ero io che ad un certo momento decidevo di trattare le frazioni in classe, ora ho capito che, per permettere agli alunni la costruzione di un apprendimento significativo sulle frazioni, sia importante introdurle con gradualità e naturalezza, tentando insieme di porre l’attenzione su quelle occasioni reali che appaiono come più originali e interessanti».

Prima analisi critica dei libri di testo

Le nostre riflessioni ci hanno rese particolarmente attente nei confronti dei libri di testo.
Subito dopo l’analisi della definizione di frazione riportata su tutti i libri di testo, che troppo presto diventa dominante e non spendibile in tutte le

situazioni, abbiamo cominciato a rivedere criticamente soprattutto gli esercizi, trovandone molti non corretti. Alcuni presentavano solo delle imprecisioni, altri veri e propri errori, come le tabelle dove si chiede di scrivere *il* precedente e *il* successivo di un numero decimale.
Dopo la formazione, che ci ha permesso di capire la struttura dei numeri razionali, quando ci capita di trovare esercizi in cui si devono disporre le frazioni sulla linea dei numeri, riteniamo importante che sia specificato che cosa si deve esplicitare: se i decimi, i centesimi, i millesimi,… e cerchiamo di fare molta attenzione per non rischiare di creare una concezione sbagliata, secondo la quale sarebbe possibile stabilire il successivo di un numero decimale o di una frazione, così come facciamo per i numeri naturali.

Non accettiamo più con disinvoltura la spiegazione che forniscono i libri di testo della strategia per trovare frazioni equivalenti: “bisogna moltiplicare o dividere sia il numeratore che il denominatore per lo stesso numero”. Ora facciamo attenzione e riflettiamo insieme ai nostri alunni sulla difficoltà di trasferire in certi casi tale strategia, perché, ad esempio, le frazioni $\frac{2}{4}$ e $\frac{3}{6}$, che pure sono equivalenti, sono… difficili da ottenere direttamente l’una dall’altra con questa logica.
Riflettiamo insieme ai nostri alunni anche sul fatto che si possono trovare infinite frazioni equivalenti, ma la gestione dell’equivalenza delle frazioni non funziona nel concreto discreto, dove, ad un certo punto, le frazioni che hanno un senso finiscono.

Inoltre, abbiamo rilevato che, in quasi tutti i sussidiari in commercio, le pagine sulle frazioni sono slegate dalle pagine sulle percentuali, come se tra queste non ci fosse alcun collegamento.

Il lavoro di analisi dei libri di testo continua insieme agli alunni ed è nostra intenzione ricercare errori o imprecisioni da utilizzare come spunti di riflessione collettiva in classe.

7. Conclusioni degli insegnanti

Il cambio delle nostre convinzioni sta gradualmente modificando tutta l’azione didattica. Con l’entusiasmo e il desiderio di metterci sempre in gioco, stiamo affrontando un percorso nuovo, profondo, vissuto con motivata convinzione e partecipazione; una trasformazione che, com’è

normale, richiede tempo, ma che, siamo certe, porterà a grandi risultati. A questo punto del nostro viaggio insieme ci sentiamo tranquille e fiduciose delle attività che stiamo proponendo e di quelle che proporremo.
Consapevoli che l'apprendimento è il risultato di un insegnamento esplicito, nel quale dobbiamo coinvolgere e rendere corresponsabili gli alunni, e che non c'è una soluzione o una ricetta applicabile sempre, cerchiamo di evidenziare le situazioni più curiose, interessanti e anche quelle più difficili e le facciamo diventare oggetto di discussione e di confronto all'interno del gruppo.
È proprio questa la nostra forza: la possibilità di confrontarci e il sostegno che, attraverso il gruppo, ciascuna di noi riceve e, a sua volta, offre. Crediamo con convinzione che quando si modifica radicalmente l'azione didattica e si rimettono in discussione le metodologie e le scelte adottate in precedenza, si perdono le certezze ed è facile entrare in crisi; per questo può essere molto difficile affrontare questo momento da soli. È il gruppo che rassicura e dà coraggio; le incertezze e i dubbi individuali sono, in realtà, gli stessi di tutti ed è più facile cercare insieme soluzioni e nuove strategie. Noi, insieme, abbiamo cominciato a ripensare alla trasposizione didattica e a farla davvero; non ci affidiamo più ai suggerimenti delle guide o dei libri di testo, ma inventiamo e creiamo proposte, considerando ovviamente con attenzione il sapere matematico, ma pensando ancora di più al gruppo classe e alle modalità che con quel gruppo si possono attivare. È proprio qui che scatta quella particolare magia che rende questo momento uno dei più vivi e interessanti del processo di insegnamento - apprendimento, quello in cui viene maggiormente implicata la nostra professionalità.
Socializziamo sempre gli aspetti didattici e privilegiamo le situazioni a-didattiche che richiedono una buona dose di coraggio, una grande preparazione e professionalità, molta pazienza e anche grandi capacità di osservazione. Ma sappiamo che la costruzione di apprendimento, quello vero, quello significativo, avviene soltanto nel momento in cui l'allievo è direttamente coinvolto, quando, cioè personalmente si deve occupare della risoluzione del problema e della costruzione della propria conoscenza.
In questo periodo siamo nella fase più creativa e stiamo progettando e realizzando esperienze ed attività per sviluppare le varie interpretazioni delle frazioni, a partire dalla scuola dell'infanzia fino alla scuola

secondaria di I grado, ma non abbiamo abbandonato lo studio. Come tutti gli anni, da quando il gruppo si è costituito, stiamo proseguendo anche la formazione e, quando abbiamo dei dubbi, con tutta l'umiltà necessaria, ci mettiamo a studiare. Continuiamo quindi ad aggiornarci e ad esaminare le ricerche in didattica della matematica sul tema "insegnamento - apprendimento delle frazioni" che sempre apportano nuovi contributi, alternando incontri di formazione a riunioni di gruppo, durante le quali discutiamo, progettiamo e verifichiamo, perché siamo convinte che solo con una solida preparazione possiamo, finalmente, fare trasposizione didattica vera, che abbia senso ed efficacia.

8. Risposte alle domande di ricerca

Siamo ora in grado di rispondere alle domande di ricerca riportate nel paragrafo 2.1.

Prima dello studio collettivo.
R1. La ricerca dimostra che gli insegnanti di scuola dell'infanzia, primaria e secondaria di I grado conoscono poche interpretazioni del concetto di frazione; tra queste risulta altamente predominante l'interpretazione come parte di un uno-tutto, quasi esclusivamente di tipo continuo. Tale interpretazione di frazione è univocamente determinata dall'usuale definizione che gli insegnanti trovano proposta in modo univoco nei libri di testo e presentata esattamente in questi termini ai propri allievi. Essa è ritenuta dagli insegnanti corretta, soddisfacente e di facile comprensione, anche perché non è consuetudine mettere in discussione l'"autorità" di un testo pubblicato.
R2. Le idee che hanno gli insegnanti nei confronti del problema della trasposizione didattica per questo sapere sono di solito condizionate dalle stereotipate e assai limitate proposte presenti nei testi scolastici; ossia, gli insegnanti non si pongono particolari quesiti nei confronti della trasposizione didattica di tale sapere, pur essendo perfettamente a conoscenza del fatto che questo argomento è di difficile costruzione concettuale da parte degli allievi. Le proposte vertono di solito su rigide suddivisioni di un intero in tante parti "uguali", senza cercare contesti nuovi dove la frazione può essere analizzata e approfondita nei suoi diversi aspetti.

Durante lo studio collettivo.
R3. Gli insegnanti, messi di fronte al sapere matematico concernente le

frazioni, sono disposti a cambiare convinzioni sia sul tema "frazioni", sia sulla relativa trasposizione didattica, pur manifestando, inizialmente, una certa diffidenza e una certa difficoltà ad accettare tale cambiamento e soprattutto a trasferirlo nella propria azione didattica. Occorre infatti precisare che, a detta degli insegnanti stessi, rendersi conto delle proprie manchevolezze su un tema risulta molto più facile rispetto a prendere decisione sul cambio della trasposizione didattica di questo argomento. In questo particolare contesto è stato il gruppo la forza trainante degli avvenuti cambi che continuano ancora oggi.

A seguito dello studio collettivo ed in termini di ricerca – azione.
R4. I cambi di convinzioni sul sapere hanno comportato notevoli cambi di convinzioni sul piano dell'azione didattica che si stanno ancora attuando. Una volta modificato un certo sapere, le usuali e ripetitive proposte didattiche non sono più in grado di coprire i diversi aspetti analizzati e poi fatti propri; sono quindi gli insegnanti stessi a sentire l'esigenza di voler cambiare la propria azione didattica; ma la motivazione nel farlo non corrisponde necessariamente alla volizione, ossia alla modifica effettiva delle proprie prassi. In questo contesto, per avviare tali cambiamenti, il gruppo ha rappresentato una grande forza sia sul piano personale che nel rispondere alle ovvie resistenze della noosfera. È stato infatti il gruppo la vera forza di questa ricerca che ha permesso di approfondire in senso critico i concetti, ha attenuato le paure e le insicurezze e ha dato spinta alla volizione nell'effettuare cambi nella trasposizione didattica. Riteniamo, infatti, che, oltre al cambio di convinzioni sul sapere, sia fondamentale poter condividere e discutere con i colleghi le difficoltà e i dubbi, per sperimentare nuove strategie, per costruire una nuova metodologia e nuovi possibili percorsi e giustificare al mondo esterno le proprie scelte sulla base di considerazioni condivise. In solitudine, è più difficile vincere la crisi e l'incertezza provocata da nuove convinzioni, quindi è più difficile che avvenga un reale cambiamento nell'azione didattica.
È soprattutto tramite il gruppo che, una volta superata la prima fase di paura e di incertezza, è possibile che avvenga, come in questa occasione, una totale revisione della propria azione didattica.

Crediamo che questa esperienza di apprendimento e di ricerca – azione messa in atto da parte di un gruppo di 36 insegnanti di tre diversi livelli scolastici sia una profonda testimonianza di come sia possibile modificare le proprie convinzioni su un dato sapere grazie allo studio consapevole e adulto avvenuto in gruppo e in modo personale, e di come tali cambi possano comportare una rivisitazione critica e profonda delle proprie posizioni per quanto concerne la trasposizione didattica di quel sapere, vincendo le paure e le insicurezze iniziali tramite il confronto con gli altri.

Bibliografia

Adler J. (2001). Learner performance and fuzzy generalizations: key issues professional development research. In: van den Heuvel-Panhuizen M. (ed.) (2001). *Proceedings of the 25th PME International Conference.*

Arrigo G., Sbaragli S. (2004). *I solidi. Riscopriamo la geometria.* Roma: Carocci.

Bagni G.T., D'Amore B. (2005). Epistemologia, sociologia, semiotica: la prospettiva socio-culturale. *La matematica e la sua didattica.* 1, 73-89.

Brouchard JM. (1987). La famille: impact de la déficience mentale et partecipation à la intervention. In: Jonescu S. (ed.) (1987). *L'intervention en deficience mentale*. I. Bruxelles: Mardaga.

Brown C.A. (1985). *A study of the socialization to teaching of a beginning mathematics teacher.* Unpublished doctoral dissertation, University of Georgia, Athens, GA., USA.

Canevaro A. (1990). La ricerca-azione. In: Telmon V., Balduzzi G. (eds.) (1990). *Oggetto e metodi della ricerca in campo educativo: le voci di un recente incontro*. Bologna: Clueb.

Canevaro A., Gaudreau J. (1988). *L'educazione degli handicappati*. Roma: NIS.

Chapman O. (1996). Reconstructing teachers' thinking problem solving. In: Puig L., Gutiérrez A. (eds.) (1996). *Proceedings of the 25th PME International Conference*. 2, 193-200.

Cooney T.J. (1983). Espoused beliefs and beliefs in practice: The cases of Fred and Janice. In *Proceedings of the 5th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME-NA).* Montreal, Canada. 162 - 169.

Cooney T.J. (1985). A beginning teacher's view of problem solving. *Journal for Research in Mathematics Education.* 16, 5, 324-336.

Cottino L., Sbaragli S. (2005). *Le diverse "facce" del cubo.* Roma: Carocci.
D'Amore B. (1991). Ricerca-Azione, possibile paradigma della ricerca in didattica. *La Scuola Se*. 79-80, 14-17. [Questo articolo è stato ristampato in: Gagatsis A. (ed) (1991). *Didactiké ton Matematicon*. Report Erasmus 1992-93. Thessaloniki (Grecia) 1993; in lingua greca: 119-124, in lingua italiana: 447-450].
D'Amore B. (1999). *Elementi di didattica della matematica*. Bologna: Pitagora.
D'Amore B. (2003). *Le basi filosofiche, pedagogiche, epistemologiche e concettuali della Didattica della Matematica*. Bologna: Pitagora.
D'Amore B. (2004). Il ruolo dell'Epistemologia nella formazione degli insegnanti di Matematica nella scuola secondaria. *La matematica e la sua didattica*. 4, 4-30.
D'Amore B. (2005). Pratiche e metapratiche nell'attività matematica della classe intesa come società. Alcuni elementi rilevanti della didattica della matematica interpretati in chiave sociologica. *La matematica e la sua didattica.* 3, 325-336.
D'Amore B., Fandiño Pinilla MI. (2001). Concepts et objects mathématiques. In: Gagatsis A. (ed) (2001). *Learning in Mathematics and Science and Educational Technology*. Atti del Third Intensive Programme Socrates-Erasmus, Nicosia, Università di Cipro, 22 giugno -6 luglio 2001. Nicosia (Cipro): Intercollege. 111-130.
D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I. (2004). Cambi di convinzione in insegnanti di matematica di scuola secondaria superiore in formazione iniziale. *La matematica e la sua didattica*. 3, 27-50.
D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I. (2005). Relazioni tra area e perimetro: convinzioni di insegnanti e studenti. *La matematica e la sua didattica.* Bologna: Pitagora. 2, 165-190.
D'Amore B., Godino D. J. (2006). Punti di vista antropologico ed ontosemiotico in Didattica della Matematica. *La matematica e la sua didattica*. 1, 7-36.
D'Amore B., Maier H. (2002). Produzioni scritte degli studenti su argomenti di matematica (TEPs) e loro utilizzazione didattica. *La matematica e la sua didattica*. 2, 144-189.
D'Amore B., Radford L., Bagni G.T. (2006). Ostacoli epistemologici e prospettiva socio-culturale. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*. 29B, 1, 11-39.

D'Amore B., Sbaragli S. (2005). Analisi semantica e didattica dell'idea di "misconcezione". *La matematica e la sua didattica*. 2. 139-163.

da Ponte J.P. (1994). Mathematics teachers' professional knowledge. In: J.P. da Ponte, J.F. Matos (Eds.). (1994). *Proceedings of the 18th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME).* Lisbon, Portugal: University of Lisbon. 1, 195-210.

da Ponte J.P., Berger P., Cannizzaro L., Contreras L.C., Safuanov I. (1999). Research on teachers' beliefs: empirical work and methodological challenges. In: Krainer K., Goffree F., Berger P. (Eds.). *Proceedings of the First Conference of the European Society for Research in Mathematics Education*. *CERME*-1, Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik, Osnabrück. 3, 79-97.

de Freitas E. (2004). Plotting intersections along the political axis: The interior voice of dissenting mathematics teachers. *Educational Studies in Mathematics*. 55, (1-3), 259-274.

Easen P. (1985). *Making School Centered INSET Work*. Helm: Press Croom.

Ebbut D. (1985). Educational Action Research: Some General Concerns and Specific Squibbles. In: Burgess R.G. (ed.). (1985). *Issues in Educational Research: Qualitative Methods*. London: The Falmer Press.

Edwards T. G., Hensien S. M. (1999). Changing instructional practice through action research. *Journal of Mathematics Teacher Education.* 2(2), 187-206.

Elbaz-Luwisch F., Moen T., Gudmundsdottir S. (2002). The Multivoicedness of classrooms: Bakhtin and narratives of teaching. In: Heikkinen H., Huttunen R., Syrjala L. (eds.) (2002). Biographical research and narrativity: Voices of teachers and philosophers. University of Jyvaskyla: SoPhi Press. 197-218
http://www.svt.ntnu.no/ped/sigrun/publikasjoner/bakhtin.htm

Fandiño Pinilla M. I. (2002). *Curricolo e valutazione in matematica*. Bologna: Pitagora.

Fandiño Pinilla M. I. (2005). *Le frazioni, aspetti concettuali e didattici*. Bologna: Pitagora.

Festinger L. (1957-1973). *Teoria della dissonanza cognitiva*. Milano: Angeli. I ed. orig. 1957.

Frabboni F. (1990). Per una teoria razionalistica della ricerca-azione. In:

Telmon V., Balduzzi G. (eds.) (1990). *Oggetto e metodi della ricerca in campo educativo: le voci di un recente incontro*. Bologna: Clueb.

Furinghetti F. (1997). On teachers' conceptions: from a theoretical framework to school practice. *Proceedings of the First Mediterranean Conference Mathematics-Education and Applications'*. Nicosia, Cyprus. 277-287.

Gudmundsdottir S. (1996). The Teller, the Tale, and the One Being Told: The Narrative Nature of the Research Interview. *Curriculum Inquiry*. 26(3), 293-30.

Gudmundsdottir S. (2001). Narrative research on school practice. In: Richardson V. (ed.) (2001). *Fourth Handbook for Research on Teaching*. New York: Macmillan. 226-240.

Gudmundsdottir S., Flem A. (2000). Voices of teachers in school reform. Keynote paper at a workshop on "Teachers' lives, narrative research, and school change". Haifa University, Israel, May18th, 2000. [http://www.sv.ntnu.no/ped/sigrun/publikasjoner/voices.htm (23/05/05)].

Henry C., Kemmis S. (1985). A Point-by-Point Guide to Action Research for Teachers. *Australian Administrator*. 6, 4. Geelong, Vic.: Deakin University.

Hiebert J., Morris A. K., Glass B. (2003). Learning to learn to teach: An "experiment" model for teaching and teacher preparation in mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education*. 66, 201-222.

Hoyles C. (1992). Mathematics teaching and mathematics teachers: a meta-case study. *For the learning of mathematics*. 12, 3, 32-44.

Jaworski B., Wood, Dawson S. (1999). *Mathematics teacher education. Critical international perspectives*. London: Falmer Press.

Krainer K. (1998). Dimensions of teachers' professional practice: Action, reflection, autonomy and networking. In: Breiteig T., Brekke G. (eds.). *Theory into Practice in Mathematics Education, Proceedings from Norma 98*. Kristiansand: Agder College Research Series. 36-44.

Krainer K., Posch P. (eds.) (1996). Lehrerfortbildung zwischen Prozessen and Produkten. Bad Heilbrunn: Klinkhardt. [Review in: *Journal of Mathematics Teacher Education*. 1, 1, 1998, 113-116].

Lewin K. (1946). Action Research and Minority Problems. *Journal of Social Issues*, Vol. 2.

Llinares S. (1999). Conocimiento y práctica profesional del profesor de matemáticas: características de una agenda de investigación. *Zetetike*. 12, 7, 9-36.

Llinares S., Sánchez García V. (2002). Imágenes sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje en estudiantes para profesores de secundaria y tareas matemáticas escolares. *Revista de Educación*. 3, 443-461.

Llinares S., Krainer K. (2006). Mathematics (student) teachers and teacher educators as learners. In: Gutierrez A., Boero P. (eds.) (2006). *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education.* Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers B.V. In corso di stampa.

McClain K. (2003a). Supporting teacher change: a case from statistics. In: Pateman NA., Dougherty BJ., Zillioux JT. (eds.) (2003). *Proceedings of the 27th PME International Conference*. 3, 253-260.

McClain K. (2003b). Supporting preservice teachers' understanding of place value and multidigit arithmetic. *Mathematical thinking an learning*. 5, 4, 281-306.

Pehkonen E. (1995). What are the key factors for mathematics teachers to change? In: Meira L., Carraher D. (eds.). *Proceedings of the 19th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME).* Recife, Brazil: University of Pernambuco. 2, 178-185.

Presmeg N. (2002). Beliefs about the nature of mathematics in the bridging of everyday and school mathematical practices. In: Leder G., Pehkonen E., Törner G. (eds.) (2002). *Beliefs: A hidden variable in mathematics education?* 293-312. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Raths J. (2001). Teachers' Beliefs and Teaching Beliefs. Early Childhood Research & Practice. 3, 1.
http://ecrp.uiuc.edu/v3n1/raths.html (05/03/05)

Rokeach, M. (1979). *Beliefs, attitudes and values: a theory of organization and change.* San Francisco, CA.: Jossey-Bass.

Sbaragli S. (2005). Misconcezioni "inevitabili" e misconcezioni "evitabili". *La matematica e la sua didattica*. 1, 57-71.

Schifter D. (1990). Mathematics process a mathematics content: a course for teachers. In: Booker G., Cobb P:, Mendicuti T. (eds.) (1990). *Proceedings of the 14th PME International Conference*. I, 191-198.

Schifter D. (1993). Mathematics process as mathematics content. A course for teachers. *Journal of mathematical behaviour*. 12, 3, 271-283.

Schoenfeld A.H. (1983). Beyond the purely cognitive: beliefs systems, social cognitions and metacognitions as driving forces in intellectual performance. *Cognitive science*. 7, 4, 329-363.

Shaw K. (1989). *Contrasts of teacher ideal and actual beliefs about mathematics understanding: three case studies.* Doctoral dissertation. University of Georgia, Athens, GA., USA.

Strehle E., Whatley A., Kurz K.A., Hausfather S.J., Stroudsburg E. (2001). Narratives of collaboration: inquiring into technology integration in teacher education. *Journal of Technology and Teacher Education*. 10(1), 27-47.

Thompson A.G. (1984). The relationship of teachers' conceptions of mathematics and mathematics teaching to instructional practice. *Educational Studies in Mathematics*. 15, 105-127.

Tirosh D., Graeber A. (2003). Challenging and changing mathematics teaching classroom practice. In: Bishop A.J., Clements M.A., Keitel C., Kilpatrick J., Leung F.K.S. (eds.). *Second International Handbook of Mathematics Education.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. 643-687.

Wood T. (2001). Learning to teach mathematics differently: reflection matters. In: van der Heuvel-Panhuizen M. (eds.) (2001). *Proceedings of the 25th PME International Conference*. 4, 431-438.

Zan R. (1998). Problemi e convinzioni. Bologna: Pitagora.